

國立台灣師範大學教育心理與輔導學系
教育心理學報，民83，27期，35～62頁

國中生代數應用題教學策略 效果之評估

林 清 山 張 景 媛

本研究的主要目的有二：1. 針對國中生在學習代數應用題時所可能發生的錯誤概念，設計出一套符合內化理論的數學教學策略方案。2. 以實徵研究的方法考驗這一套內化理論的數學教學策略對國中生代數學習時的學習效果。本研究以臺北市螢橋國中二年級85位學生進行質的研究；另以天母國中二年級學生45位進行實驗教學的研究。使用的工具包括後設認知量表、動機信念量表、數學測驗卷以及兩個訓練課程（後設認知與動機信念訓練課程、代數應用題解題策略訓練課程）等。所得的資料採用質的分析以及單因子多變項變異數分析和混合設計二因子變異數分析等統計法來加以分析。結果發現：1. 學生在代數應用題的學習上有系統性的錯誤概念產生。2. 學生在進行「後設認知與動機信念訓練課程」後，對其動機信念未能產生立即的影響，但對其後設認知有立即的影響產生。3. 學生在進行「代數應用題解題策略訓練課程」後，其數學解題能力有所進步。4. 接受兩項訓練課程的實驗組一的學生在追蹤研究時的代數應用題上的表現最好。這些結果顯示：經由瞭解學生的錯誤概念，可以幫助教師設計良好的教學策略；同時，後設認知與動機信念對學生的學習會產生持續努力的效果。

關鍵詞：代數應用題，後設認知，動機信念，教學策略

研究動機與目的

近年來，Vygotsky (1978) 的內化理論 (theory of internalization) 逐漸受到教學心理學家的重視。Vygotsky 認為思考是一種活動，會依循個人內在的和外在的語言來進行，並透過人際間的經驗而發展。因此，他提出近側發展區 (zone of proximal development, ZPD) 的觀念。這個觀念強調我們可以由學生目前的表現與教導者教學後的學習表現所產生的差距看出學生的學習潛能。當此差距愈大時，表示學生的學習潛能愈廣。此外，Vygotsky 非常強調人類的心理歷程在開始時都是經由社會化而來。孩童經由成人的社會支持並與成人互動，漸漸學會獨自承擔責任而建立概念，終於內化為內在的心理歷程。這個內化理論被心理學家

* 本文為國科會專題研究計畫 (NSC 83-0301-H-003-012) 的第二年研究報告。本文的完成得到行政院國家科學發展委員會的補助，謹致謝忱。

廣泛的應用在教學中。其主要特色是揚棄過去教師單向的教學方式，而改為師生之間有互動作用的新教學方式，以求透過責任的轉移而達到教學的目的。

國中學生在學習代數應用題時，必須透過方程式來解答問題。此種解答方法與在國小時的解答方式不同，因此有的學生無法適應而產生學習困擾。由於代數應用題是以抽象思考和邏輯推理為主，不只涉及到學生的計算能力，還更牽涉到學生的概念理解能力。而概念的理解和較複雜的認知歷程有關，如對問題的瞭解、所用的解題策略等都需要有正確的數學知識。曾有學者（Brown & Burton, 1978; Simon, 1977）發現：學生在解答數學問題時出現多種錯誤概念，而這些錯誤概念正是造成學生學習困擾的障礙。因此，本研究希望能透過對學生學習代數應用題錯誤概念的瞭解，設計出一套符合內化理論的數學教學策略方案。此為本研究動機之一。

內化理論的教學強調的是師生口語互動。根據此項理念而設計的教師教學策略，如問問題（Orlich et al., 1990, Palincsar & Brown, 1984）可以增加師生口語的互動，增進學生學習的動機，而且可使學生將所學得的事物加以內化，因而建構為學生的知識。此外，有學者針對數學應用題的教學提出一些教學策略，如Hart（1993）讓學生參與小組討論；Winograd（1993）讓學生編寫數學應用題；Willasenor & Kepner（1993）採用認知引導教學的策略，幫助學生分析思考歷程等。這些策略都支持內化理論應用在數學教學上。但過去學者的研究多偏向於某一種教學策略的效果研究，未能將這些有效的教學策略整合成一套教學策略方案。因此，本研究希望把所設計的數學教學策略方案，以實徵研究的方式來驗證其教學效果。此為本研究動機之二。

由上述的研究動機，研究者提出本研究的主要目的：

1. 針對國中生在學習代數應用題時所可能發生的錯誤概念，設計出一套符合內化理論的數學教學策略方案。
2. 以實徵研究的方法考驗數學教學策略方案對國中生代數學習時的學習效果。

文獻探討

對於學生的數學學習而言，教學策略必須依據學生的原有知識而設計。同時，學生的學習動機也是影響學生是否願意接受教師教學策略的重要因素之一（林清山、張景媛，民82）。因此，本研究將從學生建構數學概念的研究、學生學習策略與學習動機的研究、教師教學策略的研究以及代數應用題教學策略的研究四方面加以探討。

一、學生建構數學概念的研究

數學教學活動通常是以不同的形式在不同年級或不同班級中進行，這種多樣化的情境使得教師需要能以適切的態度來看待學生的學習表現。也就是說，教師不能一成不變的看待每位學生的學習表現。他們必須先瞭解個別學生在學習數學時有那些困擾及產生這些困擾的原因是什麼。教師在瞭解學生學習上的困難問題之後，才能進一步想出適當的方式來引導學生建構出正確的數學概念（Vergnaud et al., 1990）。

學生在學習過程中不斷的建構知識，而在建構知識的過程中有可能產生錯誤的概念，而造成學習的困擾並影響學生未來的學習。Vergnaud et al.,（1990）指出：認知學習應是一種建構的歷程。所謂建構就是人們設法去獲得一種當我們面對問題時所採行的方法以形成新的知識。近來的研究均顯示學生是以自己的認知方式去處理所面對的數學問題，而這些方法

都是最自然且適合學生本身的方法。因此，目前的數學教學應花更多的努力來觀察學生解題的過程，然後以學生本身的思考為主，運用適當的教學策略來引導學生建構出正確的數學概念。因為學生並不是經由被動吸收概念、定義和證明來學數學的。教師的工作是去塑造一個有數學態度、數學概念和數學解題方法的環境，而不是一味的給學生解題方法、算則、或公式。

Usnick (1992) 的研究認為教師的教學策略對學生學習結果有很大的影響，而教學策略包含有數學概念的獲得、基本算則的學習、以所學到的算則來解決有關問題、對錯誤概念的確認以及對錯誤概念的補救等。此項研究明顯的指出：學生對錯誤概念的確認有助於學生建構出正確的數學概念，而教師及早發現學生的錯誤概念有助於學生自己發現自己的錯誤概念。

Mayer (1987) 曾研究數學解題的歷程。他提出在解決數學問題時有四個重要的成份：問題轉譯、問題整合、解題計畫和監控、以及解題執行。在問題轉譯時要運用到語言知識，在問題整合時會使用到基模知識，在解題計畫和監控時要用到策略知識，最後，在解題執行時會運用到程序性知識。這四個成份已為數學教育學者所認可並加以深入研究。所以，在瞭解學生解題的錯誤概念時，教師可以從這四方面來加以探討。

針對學生的錯誤概念，林清山、張景媛 (民82) 研究指出：學生在課堂教學時會因語言溝通上的問題而產生錯誤概念。Cardelle-Elawar (1992) 認為提升數學低成就學生的數學解題能力必須改善這些學生的語文能力，使學生能瞭解問題，加強適當的基模知識，纔能對問題產生一個以上的策略來解決問題。

二、學生學習策略與學習動機的有關研究

近年來，心理學家不但重視學生的學習策略是否良好，而且也注意到學生是否有較高的學習的動機。有些學者 (Fabricius & Hagen, 1984; Kurts & Borkowski, 1984; Weinert, 1987) 指出：當學生的學習動機不佳時，就明顯的會影響其學習策略的運用。

Weinstein (1988) 認為成功的學習者應具備下面五項特質：(1)動機 (motivation)：儘己所能的將功課做好；(2)注意力 (attention)：集中注意力在該做的課業上，並盡量避免外界的引誘或干擾；(3)瞭解 (understanding)：對未知的或不瞭解的課業，能經由和老師或和同學的討論而獲得理解；(4)回憶 (recall)：對於學習過的知識能想辦法加以記憶，重新自腦中回憶出來；(5)放鬆心情 (relatively stress-free)：能自我調適心情，在適當壓力下學習。由Weinstein的看法得知，要成為一個成功的學習者，第一項特質即是要有動機去學習。

Pintrich & DeGroot (1990) 也認為只有認知知識和後設認知策略兩者還不足以提昇學生的學業成就；學生必須要有動機去運用這些策略，才能調整其學習的表現。Pintrich & DeGroot將動機分為自我效能 (self-efficacy)、內在價值 (intrinsic value) 及測試焦慮 (test anxiety) 三部份。結果發現測試焦慮和學業成就有負相關，但卻和學習策略的使用沒有任何相關。而自我效能雖然和學生的用功程度及學業表現有正相關存在，卻未顯示和學習策略有直接關係。其中只有內在價值一項和學生認知策略的使用及自我調整學習有顯著相關。

其他的學者也認為後設認知和動機之間有很密切的關係。如Fabricius & Hagen (1984) 和Kurtz & Borkowski (1984) 發現後設認知的判斷和成敗的歸因有關；Weinert, Knopf & Barann (引自Weinert, 1987) 發現動機會影響記憶表現。此外，如Renninger (1992) 的研究也顯示學生的學習興趣可以激勵學習，並且會引導學生使用較深度的理解歷程。Schiefele & Krapp (1991) 發現：學習興趣會促使學生集中注意學習，而且學習興趣高者較會使用精緻化的策略 (elaborative strategy)，筆記也記得比較多。

三、教師教學策略的有關研究

近來，教育學者提出來的教學策略當中和內化理論有關的，主要有「問問題」、「同儕教導」及「交互教學」等策略。下面就分別評介這幾種教學策略的有關研究。

(一)問答技巧

Orlich et al. (1990) 認為若要激發學生的創造思考能力、組織統整能力以及口語表達能力，由教師與學生互相問問題最能達到此項目的。問問題是藉由師生口語互動的方式來檢視教師的教學技巧和學生的學習成效。因此問問題必須同時考慮問題的質與量。Orlich (1990) 強調教師要妥善的設計題目，有系統、有技巧的呈現問題，而且要利用學生的回答或問題來發問。此外，教師在發問之後應將學生的答案加以歸納，因為學生的答案有可能是無關主題的、支離破碎的，或是另有新奇的見解。教師對於這些回答要以不批判的態度來指導學生，引導他們做深入的思考或統整學生的回答，讓學生思考之後能獲得完整的概念。

Dillon (1982) 認為教師在提問題時，最好問題要簡短，讓學生提出疑問、意見和看法，以學生的思考與表達為主，否則學生多半是回答教師所想要的標準答案。Cornbleth (1975) 則進一步指出問問題不應只是教師問、學生答的單向式溝通。問問題的主角應是學生，學生若是受到鼓勵也能提出多樣性或高層次的問題。學生問得愈多，問題的層次也可能愈高。Fishbein, VanLeeuwen & Langmeyer (1992) 研究師生的問答過程中，發現會因採用教師控制或採用學生控制的方式不同，學生的學習結果也會有所差異。此項研究發現，教學策略中採用引導學生控制自己的學習過程時，會使學生更能發現自己知識不足之處，因而促使學習者朝向自己所欠缺的知識更加努力學習。由此研究結果可知，教師應讓學生多主動提出問題，對學生的學習動機或是學習表現纔會有較大的幫助。

(二)同儕教導策略

所謂同儕教導策略就是讓學生以小組討論的方式達到課堂教學及管理的目的 (Strain, 1982)。進行同儕教導的活動時，是先由教師示範解說例題；然後，在教師的督導下，分組進行討論和練習。經由同儕間的口語互動和相互教導的學習，各組在自然的情境下完成練習。Orlich et al. (1990) 認為在進行小組討論時，教師要能包容及促進各種意見的交流。當學生能積極的參與討論時，也就是學生學習狀況最佳、學習效果最好的時候。小組討論的功能除了可使學生積極參與活動外，同時也能使缺乏學習興趣的學生，透過口語互動的學習而增進他們的學習動機。

實施同儕教導時必須注意到同儕能力的問題，也就是說同儕是否有能力教導不會的同學。此外，教師的督導是否能發揮功能亦是不可忽視的。由於同儕教導有不少的優點，但也有其限制，因此，在進行同儕教導的小組討論時，教師應該謹慎為之，必須做好事前的準備工作。例如：小組成員的安排、教材的設計、教師的督導以及小組教導者的訓練等。

(三)交互教學策略

Palincsar & Brown (1984) 認為以師生對話、師生互換角色的方式，可以進行閱讀策略和後設認知技能的訓練。他們將此種教學方式稱「交互教學」(reciprocal teaching)。交互教學是由教師和學生輪流領導對話，內容則是教材中的問題。學生經由對話，可使其從做摘要、發問、理解等活動中學習。交互教學強調的是學生必須主動參與，並讓學生體會到自己學習到的策略對自己的學習是有幫助的。

Brown, Armbruster, & Baker (1986) 認為交互教學的訓練時間必須夠長，而且訓練活動需由有經驗的教師加以有系統的建構和引導。教師藉由學生的表現予以回饋，幫助學生體

會到自己的進步情形。當學生的確感受到訓練的效果後，就會自動的將所學到的東西加以內化。此時，策略的學習已成爲學生自己的心理歷程，此能自動的加以運用。

上述幾種教學策略雖然強調的重點各有不同，但卻有一個共同點，那就是都非常重視師生間的口語互動。而且這三種教學策略也都是強調責任的轉移。如以問問題而言，在教學開始時，雖然是由教師先發問，但是到後來，因爲學生的學習興趣受到教師的激發，就逐漸變成由學生提出問題。在同儕教導時，起初亦是由教師先做說明、講解或示範，然後由同學互相教導。在此種教學活動中，學生積極的負起學習、討論的責任，而不是被動的聽講而已。師生交互教學則是透過師生的對話及角色的互換，使學生在輪到教學時必須先將所學到的東西內化爲他的知識的一部份，他才能勝任教學的工作。由於學生必須負擔教學的部份責任，也因此促成了他學習的內化。這些策略可說都是根據Vygotsky的內化理論而設計的新的教學策略。

四、代數應用題教學策略相關研究

傳統式的數學教學常使學生認爲數學是一門規則、程序、刻板的課程。實際上，教師是可以將數學變成一項有意義的活動。Wood, Cobb, & Yackel (1991) 認爲數學學習應從被動的給予轉變成全班同學與教師間的互動學習；教學方法則從單純知識的傳授轉爲知識的啓發，使學生學習思考問題進而解決問題。真正知識的獲得應是由學生自己去思考發展，而不是被動的接受與背誦。在新的數學教學概念裡，教師要學會重視學生的答案，接受學生的不同反應。即使學生的思考方式有錯誤，教師也要引導學生發現自己矛盾的地方，不要直接告訴學生正確的答案是什麼。

Cobb et al. (1992) 認爲美國近年來提倡改革數學教育，主要就是要改善數學教師的教學習慣。目前，數學教學強調讓學生發揮思考的能力，教師的教學應由過去主動的教數學知識，轉變爲今日由學生主動的來學數學概念。數學教學不再是學生努力完成教師所給予的作業以符合教師的期望，而是學生主動探索數學領域，探究數學的奧秘。

Miller (1992) 的研究發現：教師在代數課程的教學中瞭解學生對數學理解的程度，有助於教師修正自己的想法與教學方法。這篇研究明白的指出：教師瞭解學生的想法與數學思考上的問題才能對學生有所幫助。其次，教師亦應強調教學內容前後的連貫性，並不斷的溫習前面的教材，使學生數學學習能夠達到自動化的地步。這都是目前數學教學所重視的方向（單文經，民81）。

Vergnaud et al. (1990) 歸納數學教育學者所提的許多改革的建議：教師應設法引起學生的學習動機與興趣、鼓勵學生主動的參與數學學習課程、應讓學生使用計算機以減低因計算複雜式子時所產生的挫折感、應著重問題解決及推理思考問題的學習、教學時應強調師生口語互動及協同合作的教學方式等。此外，改進傳統整題答對才給分的評量方式也是一個新的趨勢，也就是以部份給分的評量方式來瞭解學生對問題理解的程度。

以下即分別探討目前學者們有關數學文字題教學策略的研究：

(一)讓學生參與小組討論

Hart (1993) 發現學生在解數學應用題時會有一些困擾。例如：學生有自己獨特的思考方式，但此方式有可能無法適配教師教學的方式；教師出題時所用的文字敘述方式可能使學生無法充分瞭解題意。教師在教學時所增加的限制可能會影響學生的思考；學生在教學中可能會因誤解題意或誤解教師的教學內容而產生錯誤的想法，此種想法進而影響學生建構正確的數學概念。Hart (1993) 認爲學生在解題時，可以透過小組討論而獲得正確的概念，因而

改善其表現。學生在小組內說出個人的想法，並經由溝通、討論的方式澄清自己的想法，進而建立更完整的數學概念。

(二)採取學習促進取向的教學方式

在數學教學研究上，Gow & Kember (1993) 曾比較兩種教學取向對學生學習影響的差異。此兩種教學取向是學習促進取向 (learning facilitation) 和知識傳遞取向 (knowledge transmission)。學習促進取向是將教學視為一種幫助學生發展問題解決技巧及批判思考能力的過程；而知識傳遞取向則是將教學重點放在知識內容的傳遞上，而非學習過程上。研究結果發現：採知識傳遞取向而獲得高分者並未能自動自發的學習；而採學習促進取向得高分者，其學習動機受到增強，因而較會主動參與學習。由此項研究結果得知，數學教師在教學時應多採用學習促進取向的教學方式，才能激發學生主動學習的動機。

(三)教學棋術策略的應用

Pimm (1987) 曾針對口語互動的教學提出了一種教學策略，稱之為「教學棋術」 (teaching gambit)。這種策略就是要教師在教數學應用題時，不要將解題的方式以教師習慣的程序全部講解出來，好讓學生有彼此討論的機會。此種方法可增進學生學習的動機，同時也可提昇學生對問題的見解，這和傳統式的教學強調詳細說明的方式不同。Pimm 發現當教師說明得愈詳細時，學生只需針對教師提出的問題給予片段字句的回答，因而無法作有系統的思考與解釋。但是，教師必須瞭解：由於課程內容性質的不同，或是學生本身認知上的差距，採用同儕間的口語互動未必保證學習一定會有正面的效果。Pirie & Schwarzenberger (1988) 的研究也指出：口語互動雖然是相當吸引人的一種教學策略，但是同儕間的討論對於課程理解的助益是有限的。因此，若只一味的增加學生討論的量，並不一定是有用的。所以，Pirie & Schwarzenberger 認為口語互動的討論方式，其主要功能應是教師藉由討論來幫助瞭解學生的數學概念，並且訓練學生以口語表達個人概念的能力。

(四)讓學生練習編寫數學應用題的題目

Winograd (1993) 的研究中要求學生寫出數學應用題的題目。結果他發現學生在編寫題目時，會先確認應用題的主題，繼而組織訊息，最後則能發展出使問題更具深度的技巧。這種讓學生寫出應用題题目的教學策略能使學生瞭解問題所在，知道問題中各條件之間的關係、以及如何運用已知條件達到解決問題的途徑。當學生在寫問題時，教師可協助學生進入主題，教師也可由生活中的實例來示範出題。學生在出題的過程中可以學到要如何出題才合乎邏輯，並使所出的題目能解出答案來。

(五)認知引導教學策略的應用

Villasenor & Kepner (1993) 的研究提出「認知引導教學」 (cognitively guided instruction) 的觀念。認知引導教學的基本假設是從學生原有知識為出發點，幫助學生分析他們的思考的歷程，使學生對所要學習的概念有更深入的瞭解。Villasenor & Kepner 用 12 位一年級的教師為實驗組，給予認知引導教學的訓練，另以 12 位教師為控制組。結果發現實驗組教師比較會和學生溝通；當學生作對答案時，他們也會進一步問學生是如何算出來的。同時，此研究也發現由實驗組教師教學的班級，其學生之數學表現較控制組的學生為佳。

教師的教學策略固然可以直接影響學生在數學應用題上的表現，但有些因素亦會間接影響學生的學習。如教師的回饋對於學生的學習也會產生間接影響。Craven, Marsh, & Debus (1991) 認為教師對學生的讚美與鼓勵是提昇學生學習自我概念最有效的方法。Schunk (1986) 也認為針對學生努力的具體行為來加以鼓勵，亦能增進其學習的自我效能。Marsh (

1990) 指出學生的自我概念與學習表現有直接的關聯。Pintrich, Marx, & Boyle (1993) 指出一個人自我概念的改變受其動機、社會、背景因素等的影響。Pintrich & Schrauben (1992) 認為學習並非單獨存在；一個人的自我效能、學習目標設定等都會影響其認知動機。因此，教師應透過回饋加強學生自我效能的信念，讓學生覺得自己有能力做好這件事。此外，Mitchell & Marland (1989) 指出：教師本身的思考模式會影響其教學行為，進而影響學生的學習。無經驗的教師在課堂中的反應有些是無意識反應，而這些反應有可能對學生造成傷害。有經驗的教師較會使用一種自我提昇基模 (ego enhancement schema) 的方式來增強學生的學習信心。因為有經驗的教師較能釐清自己的想法，其教育信念與教學行為能趨於一致，有些臨場隨機的反應也都能顧及學生的感受，因而對學生的學習動機與情緒能掌握得比較好。

綜合以上各學者所述有關數學應用題的教學研究，本研究認為有幾點是數學教師需要特別注意的：1. 瞭解學生的錯誤概念及其形成的原因；2. 瞭解學生的語文理解能力；3. 研究學生既有的數學概念與知識；4. 有效的評量學生的數學學習表現；5. 協助學生發展數學解題策略及數學思考能力；6. 有效運用口語互動的教學策略，以幫助學生將正確的數學概念內化為個人的認知知識；7. 激發學生的學習動機，以增進學生主動參與數學討論活動的頻率；8. 鼓勵學生改進自己的學習策略與方法，並給予學生充分的信心與勇氣去努力學習。

研究假設

綜合上述的文獻探討與本研究的目的，本研究提出下列研究假設：

假設一 實驗組一的學生接受「後設認知與動機信念訓練課程」後，三組學生（實驗組一、實驗組二及控制組）在中測「後設認知」方面的得分有差異存在。

假設二 實驗組一的學生接受「後設認知與動機信念訓練課程」後，三組學生在中測「動機信念」方面的得分有差異存在。

假設三 進行「代數應用題解題策略訓練課程」後，三組學生在後測「後設認知」方面的得分有差異存在。

假設四 進行「代數應用題解題策略訓練課程」後，三組學生在後測「動機信念」方面的得分有差異存在。

假設五 在代數應用題得分上，「組別」（實驗組一、實驗組二和控制組）與「階段」（中測、後測和追蹤）之間有交互作用存在。

名詞解釋

本研究中所提到的重要名詞有後設認知、動機信念、代數應用題錯誤概念、數學低成就學生以及兩個訓練課程。以下分別說明之。

一、後設認知

本研究所謂「後設認知」是指學生學習數學時，對自己學習情形的計畫、監控、評鑑和修正的能力。因此，本研究將後設認知量表分為四個分量表：目標設定、自我監控、自我評鑑及自我修正。學生在分量表上的得分高者，表示學生的後設認知能力較佳，得分低者表示後設認知能力較差。

二、動機信念

本研究中的動機信念包括自我效能和測試焦慮兩個因素。自我效能是指學生覺得自己在數學學習方面是有能力的，能學得比他人好。測試焦慮是指學生在做數學題時，可能產生的一種緊張狀態。在動機信念量表中，自我效能得分高者表示學生的自我效能較好；測試焦慮得分低者表示學生在做數學題時較不會有緊張焦慮的情形。

三、代數應用題錯誤概念

本研究中的代數應用題指的是以國中一年級所教過的一元一次方程式及二元一次方程式可以解出答案來的文字題。代數應用題錯誤概念是指國中二年級學生在國一時學習過代數題的解題方法後所可能產生的錯誤。本研究中以質的研究的方法來分析學生在代數應用題時的錯誤概念，並以三角檢核法來考驗質的分析之信效度。

四、數學低成就學生

本研究所指的數學低成就學生是指學生國一時的數學學期成績低於預測分數一個標準誤以上者。預測分數是以學生的智力測驗數學得分為預測變項、以其數學學期成績為效標變項來求得。本研究中，學生的數學學期成績低於預測分數14.95分以上者即為數學低成就學生。

五、後設認知與動機信念訓練課程

本研究中的「後設認知與動機信念訓練課程」是以國中生數學學習歷程統整模式中的重要變項加以設計，內容共有十個單元：相見歡、我的未來不是夢、我真的很不錯、盡其在我、來自心海的消息、化阻力為助力、事半功倍、我的學習秘方、羅馬競技場及豐富之旅等。這些單元主要是針對後設認知中的重要變項，如目標設定、自我監控、自我評鑑和自我修正等變項，以及動機信念中的自我效能、測試焦慮等變項來設計課程內容。

六、代數應用題解題策略訓練課程

本研究中的「代數應用題解題策略訓練課程」是依據本研究中質的研究結果，發現學生對代數應用題所可能產生的錯誤概念，並針對這些錯誤概念來設計適當的教學策略，以幫助學生自己建構正確的數學概念。本研究所使用到的解題策略有：簡化問題、建立次目標、重述問題、繪圖法、問答法、表列法、舉實例說明、試誤法、歸納式論證、語意轉譯、找出類似題、命題及估算法等。

研究方法

一、研究對象

本研究先以台北市螢橋國中二年級學生85名為受試，進行質的研究，以瞭解學生在代數應用題上的錯誤概念。受試的數學成績包含高、中、低三種學生，男女生各半。接著是以台北市天母國中二年級45名數學低成就學生為對象，進行實驗教學研究。他們被隨機分派為三組，包括實驗組一、實驗組二及控制組，每組受試為15名。

一、數學學習理論模式之研究

對於數學學習而言，它具有數學本身的特質以及一般學習上的特徵等方面的問題。因此，本節先從「數學解題評估模式」、「數學成就與態度的結構模式」、以及「學習的內在動機歷程之統整模式」三方面加以探討後，再提出本研究的「國中生數學學習歷程統整模式」。

(一)數學解題評估模式

Lester & Kroll (1991) 指出影響文字題解題表現的因素有五項：(1)知識的獲得和使用 (knowledge acquisition and utilization)、(2)控制 (control)、(3)信念 (beliefs)、(4)情意 (affects)、以及(5)社會文化 (socio-cultural)。他們以這五要素形成數學解題評估模式 (a model for mathematical problem solving assessment)。

在此模式裡，Lester & Kroll認為情意和信念是影響學習表現的重要因素。因此，教師應該在學生作答數學問題時，針對這兩項因素加以評估。他們認為情意是屬於比較長期而穩定的特質，此項特質對於學生在數學解題時的興趣、意願及毅力有極大的影響力。而信念則可塑造一個人的態度，並且會影響其在問題解決時的決定。Lester & Kroll認為信念對於一個學生在數學解題能力的發展上，扮演了相當重要的角色。其次，在數學學習表現的評估方面，Lester & Kroll將其分為認知歷程的評估和答案正確性的評估兩部份。雖然一般來說，學生做對答案是和其能力有密切的關係，但並不是有絕對的關係。譬如有的學生懂得如何解題，卻粗心大意而計算錯誤；另外有的學生答對題目，不過是碰巧湊對了答案。因此，他們認為有必要分兩部份加以評估。在評估學生數學解題的第三個因素是問題的特徵，亦即教師在評估學生的解題能力時，應從題目的類型、學生解答的策略、數學題目的內容、資料的來源及已知條件和解題之間的關係等方面加以考量。

由上述的模式可知，Lester & Kroll在評估學生的數學解題能力時，相當重視情意和認知的因素，但此模式卻疏忽了後設認知的成分。後設認知是指個人對自己的認知歷程及結果或其他有關此歷程及結果的知識。它對於數學解題時策略的運用有很大的影響力。因此，我們似乎不能由Lester & Kroll的模式充分瞭解學生數學解題的歷程。此外，在Lester & Kroll的模式中，三個成分之間並沒有以箭頭表示各個成分之間的關係。因此，我們無法得知情意和認知對於數學解題是如何發揮其影響力。

(二)數學成就與態度的結構模式

Reynolds & Walberg (1992) 以10年級的學生為例，提出數學成就與態度的結構模式。在此模式中，Reynolds & Walberg認為家庭環境是影響學生數學學習的最原始力量。家庭環境會影響學生的10年級數學成就、數學態度及數學動機，最後再影響到學生11年級的數學成就和數學態度。由此項模式可知，Reynolds & Walberg經家庭環境視為是影響數學學習最強的因素，動機則是次要因素，數學成就及數學態度則是再次要的因素。在這個模式中，Reynolds & Walberg均未提及認知及後設認知對學生數學學習的影響力，只偏重情意與態度方面的因素。

(三)學習的內在動機歷程之統整模式

對於學生一般的學習而言，McCombs (1984) 曾提出一個學習的內在動機歷程統整模式 (an integrative model of process underlying intrinsic motivation to learn)。此模式主要包括三大系統：後設認知、認知、及情意。這個模式假定一個人的後設認知系統包括認知及情意的知識 (自我覺察) 和控制 (自我調整)，而且當個人知覺到有工作的需要時，後設認知系統就會和認知系統及情意系統發生交互作用。McCombs此項統整模式最大的特點即

表一 「後設認知與動機信念訓練課程」內容分析(續)

單元名稱	教學目的	主要成分
來自心海的消息	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能認識學習的價值。 2. 學生能了解個人內在價值及其重要性。 	自我效能 目標設定
化阻力為助力	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能了解焦慮在學習上的意義。 2. 學生了解面臨焦慮時的現象及應變之道。 	測試焦慮 自我修正
事半功倍	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生了解集中注意傾聽、觀察的重要性。 2. 學生能運用找重點的方法、技巧。 	自我監控 自我修正
我的學習秘方	<ol style="list-style-type: none"> 1. 協助學生回想學過的記憶組織策略並自省個人常用的方法。 2. 協助學生了解學習數學可運用的理解策略。 	自我監控 自我修正
羅馬競技場	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能運用語言知識瞭解數學應用題的意思。 2. 學生能找出數學文字題中已知的和未知的條件。 3. 學生瞭解一個問題可用多種方法來解決。 	自我監控 自我修正
豐富之旅	<ol style="list-style-type: none"> 1. 學生能覺察自我的改變。 2. 學生能了解並運用所學。 	自我監控 自我修正

(二)「代數應用題解題策略訓練課程」內容分析

在「代數應用題解題策略訓練課程」中，也有十次的訓練課程，每次訓練課程都包含一道主要題目，課程設計是針對各個應用問題，先分析學生可能的錯誤概念，然後針對學生的錯誤概念，設計適當的教學策略。表二是各題目的分析及所使用到的策略。



表二 「代數應用題解題策略訓練課程」各單元主要問題、
內容分析及所使用的主要教學策略一覽表

主要問題	內容分析	主要教學策略
<p>單元一：有一天阿諾對洛基說：「你這毛頭小子，六年前我的年齡是你的三倍，隨著歲月增長，現在可能不只三倍了。」洛基說：「你的數學真差，到明年，你的年齡只剩下我的二倍而已，有朝一日，我還能迎頭趕上呢！」問阿諾及洛基現在各幾歲？</p>	<p>學生學過一元一次及二元一次方程式的運算，但是對於代數應用題如單元一的題目，則因題目過長，無法掌握題意；對於六年前或明年等有關時間的表示方法，無法用代數式表達出來；尙未能充分熟悉未知數的運用方式；在列式時不懂得括號的運用方法；運算式子會發生移項錯誤（正負號）的問題。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 簡化問題 • 以實例說明時間的先後意義 • 各小組討論假設的寫法 * 以工作分析法理解題意
<p>單元二：某甲有二個錢筒A和B，已知兩錢筒的錢不一樣多，但是每天都只丟入一元，今天A筒的錢是120元，幾天前，A筒的錢是B筒的二倍，且兩筒的錢共有150元。問今天B筒的錢數多少？幾天前兩筒的總和是150元？</p>	<p>學生已知今天A筒120元，但對於「幾天前A筒的錢」就不知如何表示；在假設時，常不寫明是現在或過去，自己也不清楚之間的關係；題目中的每一個數字都以為是重要的，所以都會放到式子中去運算。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 重述題意 • 小組討論假設的寫法 • 工作分析 * 繪圖法（各組依假設來繪圖） • 顯示假設中標明時間的重要性
<p>單元三：小明幾天前買了一堆蘋果和柳丁，每天各吃一個，今天蘋果的數目恰為柳丁的二倍，且蘋果和柳丁共有60個。已知原有蘋果50個，問原有柳丁幾個？今天離買水果的日子有幾天？</p>	<p>學生缺乏等號兩邊應等值的觀念；對於問題適合使用一元一次方程式或二元一次方程式來列式並不清楚，也有些學生以為一題只有一個解答的方法；前面兩題是年齡愈來愈大，存錢愈存愈多，學生會受前面影響，列式變成水果愈吃愈多。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 工作分析 • 討論假設的寫法 * 自我測試（試誤法） • 比較各組解答的方式有何不同以瞭解一題有許多解法



表二 「代數應用題解題策略訓練課程」各單元主要問題、內容分析及所使用的主要教學策略一覽表 (續)

主 要 問 題	內 容 分 析	主 要 教 學 策 略
<p>單元四：某一牧場有羊52頭，幾天前羊的數目為牛的數目的4倍，且幾天前牛羊數目為80頭。因牧場每天送出羊3頭及牛1頭，問現有牛幾頭？幾天前牛羊數為80頭？</p>	<p>學生習慣一天存一元或一年長一歲的題目，對於每天送出羊三頭及牛一頭的問題就不會列式；當解出式子時必須再看是否與問題相符，有時必須再經過轉換，才能得到正確的答案。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 工作分析 • 繪圖法 * 估算 (驗算) * 命類似題
<p>單元五：大毛和小毛有零錢若干，大毛每天固定花2元，小毛每天固定花5元。4天前，小毛的零用錢是大毛的2倍，大毛對小毛說：「你再亂花錢，三天後，我的錢就和你的錢相等了。」問大毛及小毛現在各有錢若干？</p>	<p>學生以為小毛的錢是大毛的兩倍，因此把小毛的未知數乘以2，應是大毛的未知數乘以二才對；對於大毛與小毛每天花的錢數不同感到困擾，不知如何以未知數來表示；在時間上，無法理解四天前與三天後的關係。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 工作分析 • 各組討論假設的寫法 * 表列法 • 估算法 • 試誤法 • 引導思考
<p>單元六：張老師對王同學說：「我在你這年齡時，你只有一歲，等你到你這年齡的三倍少3歲時，我就52歲。」問張老師及王同學現在各幾歲？</p>	<p>學生對於「我在你這年齡時，你只有一歲」的語意無法理解；如果直接用語意轉譯的方式來列式，可能會將上面的句子寫成「$X=Y, Y=1$」；沒有師生年齡差不變的觀念。</p>	<ul style="list-style-type: none"> • 舉實例加以說明 • 繪圖法 • 同儕輔導 • 問答法 * 命題 (各組命題由別組來解)
<p>單元七：有一個二位數，其數字和為6，把個位數和十位數對調，所得的新數較原數的二倍少6，求此二位數是多少？</p>	<p>學生會以數字的寫法用未知數來表示，例如將二位數寫成XY；矯枉枉過正的結果又將「二位數的和是六」寫成$X+10Y=6$；學生在假設時有可能假設十位數</p>	<ul style="list-style-type: none"> * 試誤法 (儘量讓學生嘗試各種情況) * 舉實例加以說明 • 引導思考 • 同儕教導



表二 「代數應用題解題策略訓練課程」各單元主要問題、
內容分析及所使用的主要教學策略一覽表（續）

主 要 問 題	內 容 分 析	主 要 教 學 策 略
	是 $10Y$ ，所以寫成 $X+10Y=6$ ；數字對調時，有可能寫成「 $X+Y=6$ ， $Y+X=6$ 」。	• 命類似題（各組交換解答）
單元八：已知一枝鋼筆的價錢是一枝原子筆價錢的15倍，而一枝鋼筆價錢的二分之一與一枝原子筆價錢的三分之一的和為47元，問每枝鋼筆和原子筆的價錢各是多少？	學生對於這類型問題較能掌握彼此間的關係，但在程序性知識上，因為有分數在式子中，產生的問題包括等號兩邊同時通分，或是化為整數的觀念不清楚。	* 語意轉譯 • 比例法 • 同儕教導 * 命題 • 小組討論
單元九：有某分數，若其分子加4，則分子與分母相等，若其分母加6，則分母為分子的3倍，求分子及分母是多少？	學生對於分數的概念是一個數字在上，叫分子，一個數字在下，叫分母，現在要學生列成代數式子，學生無法理解；在題目中的兩個條件對學生來說會誤以為一個式子，就寫成 $X+4=(Y+6)/3$ 。	• 同儕輔導 • 語意轉譯 • 舉實例加以說明 * 歸納式論證 * 估算法
單元十：英英和明明到文具店買相同的鉛筆和原子筆，英英買了鉛筆5枝和原子筆2枝，付款27元；明明買了鉛筆2枝和原子筆3枝，付款24元。問鉛筆和原子筆每枝各是多少元？	學生對這類題目已能理解題意，運用策略來列式，但是在程序性知識上還是會有錯誤產生，也就是運用消去法時會發生錯誤。	• 語意轉譯 • 試誤法 * 估算法（以發現自己程序性知識上的錯誤） • 命題 • 小組討論

*：代表主要的教學策略。



三、研究架構

本研究以質的研究法進行國中生錯誤概念的分析，再以實驗設計進行教學效果的評估。研究者以隨機分派的方法將45位數學低成就學生分為實驗組一、實驗組二及控制組三組。實驗組一接受「後設認知與動機信念訓練課程」及「代數應用題解題策略訓練課程」兩項實驗教學；實驗組二只接受「代數應用題解題策略訓練課程」一項實驗教學；控制組的學生則接受傳統式的代數應用題的教學。各組受試均接受前測，以瞭解實驗前各組是否有差異存在。經分析後，三組在各變項的得分上均無差異存在。當實驗組一接受十次的「後設認知與動機信念訓練課程」後，進行中測，以瞭解該課程的教學效果。然後實驗組一和實驗組二接受「代數應用題解題策略訓練課程」；控制組同時接受傳統教師講述的教學。三組課程內容相同，但是教學方式不同。課程結束後進行後測。本研究在實驗教學結束後兩個月再進行追蹤研究，以瞭解三組受試在代數應用題上的差異。

四、實施程序

本研究經文獻探討後，立即進行質的研究分析。首先，以螢橋國中二年級學生十個班級學生為研究對象，由教師依學生成績高、中、低加以選取，以瞭解不同程度的學生對代數應用題的錯誤概念有哪些，以及學生如何建構出正確的數學概念。本研究除了蒐集學生的錯誤概念外，並採用微衍生法（micro-genetic）的觀念，將初步研究所發現的問題，再進一步的訪談學生，以深入瞭解學生是如何建構出正確的數學概念。在進行質的研究時，為使研究分析的結果具有信度與效度，本研究採用三角檢核法（triangulation）進行分析。本研究是以兩位主試者、兩項資料及兩種方法來蒐集資料。兩位主試在分析資料時，如果意見不一致的資料就不列入結果中；兩項資料是指蒐集學生解題歷程的資料以及教師解題的方法；兩種方法是指以放聲思考和問題思考蒐集學生解題歷程的資料。以三角檢核法來檢核質的分析，是希望能獲得較為客觀、較廣泛、較深入的訊息。在質的分析之後，研究者依據質的研究所得資料設計適合國中學學習的代數應用題教學策略。然後從台北市天母國中二年級學生中選擇數學低成就學生為實驗對象。數學低成就學生的選擇是利用迴歸預測法，亦即以二年級學生在國民中學智力測驗上數學分量表的得分為預測變項，以國中一年級數學學期總成績為效標變項來進行。其迴歸預測公式（郭生玉，民74）如下所示：

$$\hat{Y} = r_{xy} \left(\frac{S_y}{S_x} \right) (X - \bar{X}) + \bar{Y}$$

$$= (.5253)(17.5698/8.576)(X - 28.1174) + 68.004$$

由上列的預測公式再計算全體學生預測數學成績的估計標準誤（standard error of estimate）。計算得到的估計標準誤為14.95。因此，在本研究中，如果學生的數學學期成績低於預測分數一個標準誤以上者，便是「數學低成就學生」。如此，經過篩選，得到79名數學低成就學生。經晤談後，有45位學生願意參加實驗教學。這45位學生被隨機分派到實驗組一、實驗組二及控制組接受實驗。實驗組一學生接受兩種訓練課程（後設認知與動機信念訓練課程、代數應用題解題策略訓練課程）；實驗組二的學生只接受代數應用題解題策略訓練課程；控制組的學生則接受傳統式的代數應用題的教學。每組受試均為15名，包含男生及女生。

五、資料分析

本研究以SPSSx套裝軟體分析研究所得資料，使用的統計方法為：

- 1.以質的研究法（三角檢核法、微衍生法）進行質的分析研究。
- 2.以獨立樣本多變項變異數分析統計法進行假設一、二、三、四的考驗。
- 3.以混合設計二因子變異數分析（two-way ANOVA, mixed design）考驗假設五。

研究結果

一、學生錯誤概念的分析結果

經由放聲思考與問題思考兩種方法對學生在解答代數應用題時的錯誤概念加以整理分析，發現學生在問題轉譯、問題整合、解題計畫及監控、和解題執行四方面容易發生的錯誤概念。茲舉例如下：

(一)問題轉譯的錯誤概念

包括學生對於關鍵詞的詞義無法充分瞭解（如三年前與四年後、增倍等）；學生對於問題中哪些是無用的條件辨識不清。

(二)問題整合的錯誤概念

包括缺乏基本的數學概念（如將乘法的交換律用到除法上，所以變成 $a/b=b/a$ ）；學生無法覺知到所計算出來的答案是否合理（如 $2/3$ 頭牛）；學生不會做假設；學生套用固定的模式而不知隨問題的變化而加以改變等。

(三)解題計畫及監控的錯誤概念

學生未能理解已知條件與未知條件之間的關係，以致假設與式子不符；無法針對不同的問題採用不同的解題策略；學生以為一個題目一定只有一個解法；學生會受前後題型的影響而採用不當的解題策略。

(四)解題執行的錯誤概念

在解方程式時會產生移項的錯誤；移項的錯誤多半是因為學生缺乏等號兩邊等值的觀念；學生不習慣使用代入法解聯立方程式；學生在使用消去法時容易產生正負號混淆的情形。

二、國生「後設認知與動機信念訓練課程」及「代數應用題解題策略訓練課程」效果之評估

(一)三組學生在訓練前各變項得分的平均數、標準差及變異數分析結果



表三 三組受試在前測時之「後設認知」、「動機信念」與「代數應用題」各變項的平均數、標準差及F考驗

變項名稱	實驗組一 (N=15)		實驗組二 (N=15)		控制組 (N=15)		F
	M	SD	M	SD	M	SD	
後設認知							
目標設定	17.87(2.33)		18.00(3.55)		16.07(4.25)		1.46
自我監控	20.60(2.80)		20.27(5.06)		18.40(4.98)		1.09
自我評鑑	20.73(3.43)		19.93(5.42)		18.33(4.82)		1.04
自我修正	18.87(3.72)		19.60(4.82)		17.87(5.18)		.53
動機信念							
自我效能	15.73(3.65)		17.33(4.30)		15.07(4.71)		1.13
測試焦慮	18.67(6.58)		19.40(6.24)		20.33(5.55)		.28
代數應用題	8.67(4.75)		9.13(7.18)		8.20(6.49)		.08

表三是三組受試在前測時之「後設認知」、「動機信念」與「代數應用題」各變項的平均數、標準差及變異數分析結果。由表三得知45位受試經隨機分派後，各組受試在各變項的得分上均無差異存在。

(二)實驗組一的學生在接受「後設認知與動機信念訓練課程」後三組學生在中測時各變項的比較分析

表四是三組受試在中測時之「後設認知」與「動機信念」各變項得分的平均數及標準差。表五是三組受試在中測時「後設認知」得分的多變項變異數分析摘要表(各組人數為15人)。表六是同時信賴區間達顯著水準的結果一覽表。



表四 三組受試在中測時之「後設認知」與「動機信念」各變項的平均數及標準差

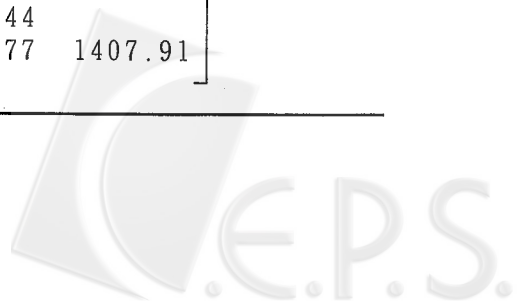
變項名稱	實驗組一 (N=15)		實驗組二 (N=15)		控制組 (N=15)	
	M	SD	M	SD	M	SD
後設認知						
目標設定	19.27(3.43)		18.27(4.57)		14.07(3.73)	
自我監控	20.67(4.53)		17.67(4.89)		15.53(4.45)	
自我評鑑	22.60(4.95)		19.40(6.22)		18.33(4.42)	
自我修正	18.67(5.84)		19.13(6.60)		16.33(4.25)	
動機信念						
自我效能	19.33(4.43)		17.20(3.90)		15.87(3.66)	
測試焦慮	21.20(7.08)		20.00(6.82)		22.33(6.07)	

由表五的多變項變異數分析摘要表得知，實驗組一的學生經「後設認知與動機信念訓練課程」後，三組受試在「後設認知」得分上有差異存在。因為計算出來的 Λ 值為.5517，小於查表值.6682，所以達到顯著水準。「後設認知」包含目標設定、自我監控、自我評鑑、自我修正等四個因素，由事後考驗得知，三組在目標設定及自我監控上有差異存在。

表五 三組受試在中測時「後設認知」四變項的多變項變異數分析摘要表（各組人數為15人）

變異來源	df	SSCP				Λ
組間	2	$\begin{bmatrix} 228.40 & & & & \\ 193.27 & 119.51 & & & \\ 149.33 & 168.89 & 147.91 & & \\ 117.13 & 82.76 & 57.24 & 67.51 & \end{bmatrix}$.5517*
組內	42	$\begin{bmatrix} 652.80 & & & & \\ 508.13 & 900.40 & & & \\ 526.67 & 752.33 & 1158.53 & & \\ 647.47 & 797.33 & 979.53 & 1340.40 & \end{bmatrix}$				
全體	44	$\begin{bmatrix} 881.20 & & & & \\ 701.40 & 1099.91 & & & \\ 676.00 & 921.22 & 1306.44 & & \\ 764.60 & 880.09 & 1036.77 & 1407.91 & \end{bmatrix}$				

* $U_{.05}(4, 2, 42) = .6682$



經同時信賴區間考驗得知，實驗組一和控制組之間在目標設定和自我監控上有差異存在，茲將達顯著水準的信賴區間估計值列於表六。

表六 中測時「後設認知」得分上，三組受試中兩個平均數差異達.05顯著水準的信賴區間估計表

依變項	比較的組別	平均數之差	同時信賴區間
目標設定	實驗組一與控制組	5.20	$0.54 < \hat{\psi} < 9.86$
自我監控	實驗組一與控制組	5.14	$0.48 < \hat{\psi} < 9.80$

表七 三組受試在中測時「動機信念」二變項的多變項變異數分析摘要表（各組人數為15人）

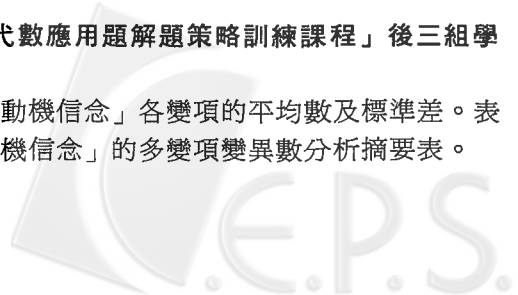
變異來源	df	SSCP	Λ
組間	2	$\begin{bmatrix} 91.73 & & \\ -22.40 & 40.84 & \\ & & \end{bmatrix}$	n.s. .8623
組內	42	$\begin{bmatrix} 675.47 & & \\ -17.33 & 1869.73 & \\ & & \end{bmatrix}$	
組間	44	$\begin{bmatrix} 767.20 & & \\ -39.73 & 1910.57 & \\ & & \end{bmatrix}$	

$$U_{.05}(4, 2, 42) = .6682$$

表七是三組受試在中測時「動機信念」得分的多變項變異數分析摘要表。由表中結果得知實驗組一的受試接受「後設認知與動機信念訓練課程」後，其動機信念的得分並未與實驗組二及控制組受試的得分有差異存在。

(二)接受「後設認知與動機信念訓練課程」及「代數應用題解題策略訓練課程」後三組學生在後測時各變項的比較分析

表八是三組受試在後測時之「後設認知」與「動機信念」各變項的平均數及標準差。表九、表十是三組受試在後測時「後設認知」與「動機信念」的多變項變異數分析摘要表。



表八 三組受試在後測時之「後設認知」與「動機信念」各變項的平均數及標準差

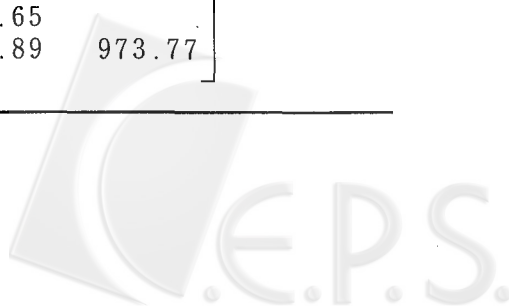
變項名稱	實驗組一 (N=15)		實驗組二 (N=15)		控制組 (N=15)	
	M	SD	M	SD	M	SD
後設認知						
目標設定	19.53	(2.62)	18.53	(4.50)	17.67	(4.62)
自我監控	21.07	(4.08)	19.40	(4.67)	17.40	(3.48)
自我評鑑	20.73	(4.75)	20.53	(4.75)	17.80	(4.39)
自我修正	18.93	(4.32)	18.60	(5.11)	15.80	(4.30)
動機信念						
自我效能	19.60	(4.21)	19.33	(4.08)	16.40	(5.25)
測試焦慮	20.60	(6.17)	19.60	(5.72)	20.33	(4.88)

由表九的結果得知，實驗組一和實驗組二接受「代數應用題解題策略訓練課程」，而控制組學生接受傳統講解式代數教學後，三組學生在後測時「後設認知」的得分上並無差異存在。因為計算出來的 Δ 值為.8309，大於查表值，所以三組間無差異存在。再由表十的結果來看，後測時的「動機信念」得分上，三組亦無差異存在。

表九 三組受試在後測時「後設認知」四變項的多變項變異數分析摘要表（各組人數為15人）

變異來源	df	SSCP				Δ
組間	2	$\begin{bmatrix} 26.18 & & & & \\ 51.22 & 101.11 & & & \\ 40.22 & 82.78 & 80.58 & & \\ 43.04 & 88.22 & 83.56 & 88.84 & \end{bmatrix}$				n.s .8309
組內	42	$\begin{bmatrix} 678.80 & & & & \\ 404.27 & 708.13 & & & \\ 455.87 & 576.27 & 903.07 & & \\ 475.73 & 587.67 & 669.33 & 884.93 & \end{bmatrix}$				
全體	44	$\begin{bmatrix} 704.98 & & & & \\ 455.49 & 809.24 & & & \\ 496.09 & 659.05 & 983.65 & & \\ 518.77 & 675.89 & 753.89 & 973.77 & \end{bmatrix}$				

$U_{.05}(4, 2, 42) = .6682$



表十 三組受試在後測時「動機信念」二變項的多變項變異數分析摘要表（各組人數為15人）

變異來源	df	SSCP	Λ
組間	2	$\begin{bmatrix} 94.58 & & \\ -5.16 & 8.04 & \\ & & \end{bmatrix}$	n.s. .8955
組內	42	$\begin{bmatrix} 866.53 & & \\ -145.40 & 1324.53 & \\ & & \end{bmatrix}$	
組間	44	$\begin{bmatrix} 961.91 & & \\ -150.56 & 1332.57 & \\ & & \end{bmatrix}$	

$$U_{.05}(4, 2, 42) = .6682$$

四各組與各階段在「代數應用題」得分上的比較研究

表十一是各組在各階段測量「代數應用題」時得分的平均數及標準差。表十二是混合設計二因子變異數分析摘要表。

表十一 各組在各階段測量「代數應用題」時得分之平均數及標準差

變項名稱	實驗組一 (N=15)		實驗組二 (N=15)		控制組 (N=15)	
	M	SD	M	SD	M	SD
中測	6.73	(4.40)	6.20	(3.69)	4.53	(2.62)
後測	13.67	(3.96)	13.60	(5.84)	9.07	(5.22)
追蹤	13.27	(6.83)	7.40	(7.20)	6.13	(6.33)

由表十二中可知，「組別」（實驗組一、實驗組二和控制組）和「階段」（中測、後測及追蹤）之間有交互作用存在，因為計算出來的F值為2.50，大於查表的F值。接著進行單純主要效果的考驗。

表十三是混合設計時考驗單純主要效果的變異數分析摘要表。由表中結果得知，不同組別的學生在代數應用題測驗的後測中有差異存在（ $F=3.68, P<.05$ ）；在追蹤時也有差異存在（ $F=7.66, P<.05$ ）。

表十二 各組學生在各階段代數應用題得分之
混合設計二因子變異數分析摘要表

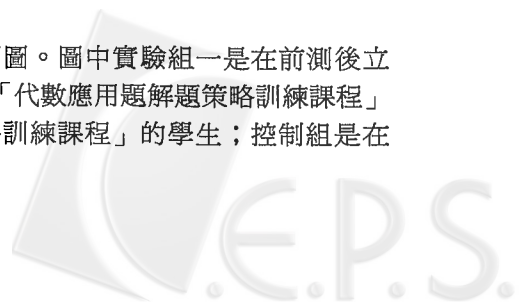
變異來源	SS	df	MS	F
受試者間	2409.74	44		
組別 (A)	486.18	2	243.09	5.31*
群內受試 (S/A)	1923.56	42	45.80	
受試者內	2737.99	90		
階段 (B)	889.91	2	444.96	22.63*
組別 × 階段 (A × B)	196.44	4	49.11	2.50*
階段 × 群內受試 (B × S/A)	1651.64	84	19.66	
全 體	5147.73	134		

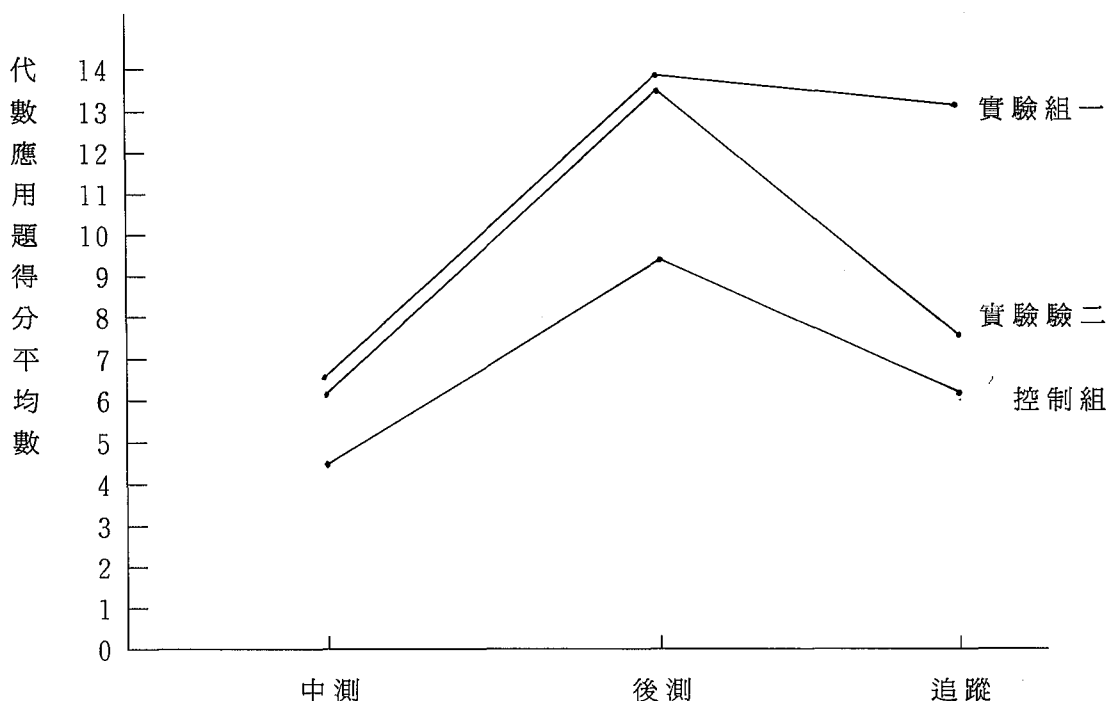
表十三 混合設計時單純主要效果的變異數分析摘要表

變異來源	SS	df	MS	F
組別 (A)				
在 b1(中測)	39.51	2	19.76	.70
在 b2(後測)	208.58	2	104.29	3.68*
在 b3(追蹤)	434.53	2	217.27	7.66*
細格內誤差 (w. cell)	3623.20	126	28.37	
階段 (B)				
在 a1(實驗組一)	454.58	2	227.29	11.56*
在 a2(實驗組二)	473.20	2	236.60	12.03*
在 a3(控制組)	158.58	2	79.29	4.03*
階段 × 群內受試 (B × subj. w. groups)	1684.98	84	19.66	

* p < .05

圖一是各組學生在各階段代數應用題得分平均數的側面圖。圖中實驗組一是在前測後立即進行「後設認知與動機信念訓練課程」，並在中測後進行「代數應用題解題策略訓練課程」的學生；實驗組二是只在中測後接受「代數應用題解題策略訓練課程」的學生；控制組是在中測後接受傳統講述式代數應用題教學的學生。





圖一 各組學生在各階段代數應用題得分平均數的側面圖

由單純主要效果的考驗來看，各組在後測及追蹤研究時的代數應用題得分上有差異存在。因此，以杜凱法進行事後考驗，結果發現：在後測時，實驗組一和實驗組二的學生在代數應用題的得分上都高於控制組的學生。可見，該訓練課程對學生在代數應用題解題上有產生影響。在追蹤研究時，實驗組一的學生得分高於控制組及實驗組二的學生。由於實驗組一和實驗組二的學生都接受「代數應用題解題策略訓練課程」，所不同的只是實驗組一的學生多接受了「後設認知與動機信念訓練課程」。由此結果，研究者認為在後測時，實驗組一和實驗組二並無差異存在，他們在代數應用題上的得分都比控制組高；這是「代數應用題解題策略訓練課程」所產生的效果。但是，在追蹤研究中，實驗組一學生的得分就變成高於實驗組二的學生，這就不是「代數應用題解題策略訓練課程」的效果了，而是因為實驗組一在先前接受了「後設認知與動機信念訓練課程」的緣故。因此，「後設認知與動機信念訓練課程」並不能單獨影響學生代數應用題的得分，但是卻能對學生產生持續努力的效果。這是本研究認為值得注意的一項發現。

討 論

一、國中生代數應用題錯誤概念分析

本研究採用微衍生法的觀念，先由研究者從學生放聲思考以及問題思考的資料分析中，發現學生的學習困難問題。然後，再由研究者與主試們討論，決定出適合的方式來引導學生思考問題，以突破學生原先的困難處。討論後，主試者以學生的困難處為起點，運用適當的

方式使學生思考有關的問題，以達到突破困境的目的。例如，研究者先將學生放聲思考中有問題的部份放錄音帶給學生聽，結果發現有些學生可以從自己所說的錄音帶中找出問題來。又如，主試先引導學生思考問題，然後，要求學生依照主試問問題的方式問一遍，由主試回答問題，學生則判斷主試的答案是否正確。若學生所問的問題較無系統，甚至問的問題不完整時，主試就提出問題，要求學生澄清剛才所提的問題。在這樣的互動中，學生可以學習到如何瞭解一道問題。

在整個引導思考的教學策略中，研究者發現讓學生瞭解問題的情境是最基本的要求。而且，若研究者能依學生的想法來中引導他們思考，就比較容易突破他們的困難處。研究者發現：要學生瞭解老師的教學策略比較困難，而要老師聽懂學生在說什麼則比較容易。老師聽懂之後，再想出策略讓學生自己發現錯在那裡，這種方式較能引起學生的反應及學習的興趣。此外，教師在教學時不宜要求學生立即掌握問題的整個情境，這對有困難的學生而言，比較難以勝任。教師應容許學生逐步瞭解題意，一部份一部份的思考，但是隨時要與前面的假設或式子配合，相互呼應。在初期階段，教師不妨讓學生以自己有把握的方式來解題，等到學生熟練之後，就能節省解題的時間，所列的式子也較簡潔。

二、「後設認知與動機信念訓練課程」及「代數應用題解題策略訓練課程」對國中生代數應用題的影響

1. 本研究者所設計的「代數應用題解題策略訓練課程」共包括有簡化問題、建立次目標、重述問題、繪圖法、問答法、表列法、舉實例加以說明、試誤法、歸納式論證、語意轉譯、找出類似題、命題及估算法等十多種解題策略。而實驗者在教導這些策略時運用了內化理論所強調的師生互動原則，不但增進數學低成就學生投入學習的興趣，同時也漸次將學習的責任轉移到學生身上。經過十次的教學後，此項訓練課程對實驗組一和實驗組二的受試產生了立即影響的效果。控制組所採用的傳統講述式代數教學方法對國中數學低成就學生沒有發揮教學效果；而實驗組學生在這種以內化理論為基礎的教學策略方案下，能將所面對的代數應用題，以個人的思考方式來解決問題。

2. 在「代數應用題解題策略訓練課程」中，研究者使用的各種策略都能發揮其應有的效果。如「簡化問題」對數學低成就學生而言，能使他們理解到問題中有些句子在解題時是重要的，而有些句子只是幫助瞭解整個情境，但是在解題時則是不需要用到。「試誤法」是學生即使作錯了，教師也不要立即打斷他的思路，讓他繼續做下去。到最後，學生會發現問題，而且知道問題出在哪裡；他們會修正錯誤的地方，另想策略來解決問題。「命題」是由學生來編寫代數應用題。學生習慣以自己的角度來看教師出的題目，但他們並不知道題目是如何編寫出來的。在訓練課程中，研究者要他們練習出題目給同學做或給自己做，他們因而在命題當中瞭解到題目是如何形成的。此外「估算法」是要求學生推估自己的答案是否合理。學生常在解完題時就立即寫出答案，而未考慮這個答案是否合理。研究者訓練學生在解答的過程中隨時監控自己的解題步驟，並檢核計算出來的答案是否合理。此種策略可以減少粗心造成的錯誤。「表列法」、「繪圖法」等都是鼓勵學生自己動手來做，而不是由教師繪圖或講解；學生只負責聽教師的陳述即可。這種方式可以讓學生瞭解問題本身的意義，有助於學生想出策略來解決問題。其他的解題策略也都能針對學生的錯誤概念加以改善。因而增進學生的認知能力與解題能力。就「代數應用題解題策略訓練課程」而言，此項訓練課程對數學低成就學生的確能產生改善學習的效果。

3. 「後設認知與動機信念訓練課程」對實驗組一的受試在解題表現上並未產生立即的效果（在中測時，實驗組一和其他兩組受試的解題表現沒有差異）。但此項課程對於實驗組一的受試在目標設定與自我監控兩個後設認知的因素卻有正面的影響。當實驗組一和實驗組二都接受「代數應用題解題策略訓練課程」之後，兩組的受試在後測時解題的表現均優於控制組，但實驗組一和實驗組二卻沒有差異。由此結果可知，「後設認知與動機信念訓練課程」對學生而言較難產生立即的影響。但是，在訓練課程結束兩個月，研究者進行追蹤研究時，卻發現實驗組二的受試在解題的表現上退步到和控制組一樣，而實驗組一的受試卻仍然維持一樣的水準，比實驗組二和控制組的受試有較佳的表現。此項研究結果顯示出「代數應用題解題策略訓練課程」雖然對學生的解題表現能有立即的影響，但若學生要能維持較佳的動機去使用這些解題策略，則仍需要在其後設認知及動機上予以加強。近幾年來，認知心理學者亦發現只重視學生的認知訓練，並不能保證學生的學習活動一定成功，例如Fabricus & Hagen (1984), Kurtz & Borkowsk (1984)及Weinert (1987)等學者都發現動機因素在學習活動上扮演著重要的角色。McCombs (1984)也認為唯有結合後設認知、認知與情意（動機）三個因素，才能達成有效的學習。因此，由本實驗的結果得知，兩個訓練課程的實施，對於數學低成就學生而言，不只是有助於解題能力的提昇，更能增長學習的動機。而此學習動機亦能提高學生的意願將解題能力內化到自己的認知結構中，因而對其解題的表現產生長期的影響。此項實驗研究對於改善數學低成就學生的學習可說有不少的幫助。

結論與建議

一、結論

本研究分為質的研究與實驗教學兩部份進行，以下分別提出幾項結論：

(一)質的研究部份

1. 學生的錯誤概念有些來自於過去經驗累積起來的訊息。這些訊息在當時可能是正確的，但是用於現在的問題解決中則是不恰當的。
2. 分析學生解題歷程可幫助教師瞭解學生的思考模式。
3. 代數應用題解題歷程包含有四個步驟（問題轉譯、問題整合、解題計畫和監控、解題執行），學生在每個步驟中會有不同的問題產生。
4. 瞭解學生在代數應用題上各步驟中的錯誤概念，有助於教師設計良好的教學策略。

(二)實驗教學部份

1. 本研究的「代數應用題解題策略訓練課程」對於學生理解代數應用題以及想出策略來解決問題上能實際達到實驗教學的效果。
2. 本研究的「代數應用題解題策略訓練課程」所採用的內化理論能對學生學習代數應用題產生主動學習的效果。
3. 本研究的「後設認知與動機信念訓練課程」雖然在立即的學習結果上沒有產生影響，但是對於實驗組一的學生卻產生了長期的學習效果。也就是說，實驗組一的學生覺得學習是有意義、有價值的一件事，所以在訓練課程結束後，學生仍然對代數應用題保持較高的學習興趣，願意花時間去學習代數應用題。
4. 本研究結果說明一件事，那就是：好的教學策略可以使學生的學習產生立即的學習效果；而要使學生在態度上有所改變，必須提昇學生的動機信念與後設認知能力。

二、建議

本研究得到以上的結論，並提出下列幾點意見，做為數學教師教學時的參考。

1. 瞭解學生在代數應用題上的錯誤概念有助數學教師設計適當的教學策略。因為教師能掌握學生錯誤的思考方式，將能針對學生的錯誤概念來加以矯正、引導，進而協助其建構出正確的數學概念。

2. 教師應瞭解國中生在進入國中之前的小學教育中，曾經學過那些數學知識，他們形成的數學概念如何，以便從既有經驗中引導學生進入更高層次的數學學習領域中。

3. 教師探究青少年在代數應用題上的建構歷程，將能幫助教師應用引導思考或內化理論來進行教學。如果教師以個人的思考歷程來推想學生的認知學習，即使是口才很好的教師也很難使學生理解代數應用題的解題方法。

4. 主動學習是青少年在解代數應用題時的不二法門。只有透過認知思考後所建構的數學知識才能變成學生個人的數學概念。當然，教師從旁協助與支持也是相當重要的。也就是說，數學教師不能一味要求學生自己想，而是要有方法的引導學生，支持並鼓勵學生主動思考問題。

5. 教師希望把自己知道的用最清楚的方式教給學生，但此種教學方式常導致教師給學生太少思考的機會。因此，教師們必須努力克制自己，少用以教師為主的教學方式，而代之以傾聽的態度及引導思考的方式來鼓勵學生主動思考問題，運用自己的策略來解決問題。

6. 時時鼓舞學生學習的興趣與動機，並以生動活潑的教學策略來引導學生學習。這是本研究認為目前數學教師可以加以努力的方向。

參考書目

林清山、張景媛（民 82）：國中生後設認知、動機信念與數學學習之關係暨代數應用題教學策略效果之評估（I）。師範大學教育心理學報，26 期，115 - 137。

郭生玉（民 74）：心理與教育測驗。台北：精華。

黃瑞琴（民 80）：質的教育研究法。台北：心理出版社。

單文經（民 81）：課程與教學研究。台北：師大書苑。

歐用生（民 78）：質的研究。台北：師大書苑。

Brown, A.L., Armbruster, B.B., & Baker, L. (1986). The role of metacognition in reading and studying. In J. Oransanu (Ed.), *Reading comprehension: From research to practice*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cardelle-elawar, M. (1992). Effects of teaching metacognitive skills to students with low mathematics ability. *Teaching & Teacher Education*, 8, 109-121.

Cobb, P., Yackel, E., Wood, T., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interaction analysis. *American Educational Research Journal*, 22, 573-604.

Cornbleth, C. (1975). Student questioning as a learning strategy. *Educational Leadership*, 33, 219-222.

Craven, R.G., Marsh, H.W., & Debus, R.L. (1991). *Effects of internally focused feedback and attributional feedback on enhancement of academic self-concept*. *Journal of Educa-*

- tional Psychology*, 83, 17-27.
- Dillon, J.T. (1982). Cognitive correspondence between question/statement and response. *American Educational Research Journal*, 19, 540-551.
- Fabricius, W.V. & Hagen, J.W. (1984). Use of causal attributions about recall performance to assess metamemory and predict strategic memory behavior in young children. *Experimental Psychology*, 20, 975-987.
- Fishbein, H.D., Eckart, E., Lauver, E., VanLeeuwen, R., & Langmeyer, D. (1990). Learners' question and comprehension in a tutoring setting. *Journal of Educational Psychology*, 63, 459-465.
- Fishbein, H.D., VanLeeuwen, R., & Langmeyer, D. (1992). Teacher versus learner controlled instruction: Question-asking and comprehension. *British Journal of Educational Psychology*, 62, 126-131.
- Gow, L., & Kember, D. (1993). Conceptions of teaching and their relationship to student learning. *British Journal of Educational Psychology*, 63, 20-33.
- Hart, L.C. (1993). Some factors that impede or enhance performance in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 167-171.
- Kurtz, B.E. & Borkowski, J.G. (1984). Children's metacognition: Exploring relationship among knowledge, process, and motivational variables. *Journal of Experimental Child Psychology*, 37, 335-354.
- Marsh, H.W. (1990). Causal ordering of academic self-concept and academic achievement: A multiwave, longitudinal panel analysis. *Journal of Educational Psychology*, 81, 646-656.
- Miller, L.D. (1992). Teacher benefits from using important writing prompts in algebra classes. *Journal of Research in Mathematics Education*, 23, 329-340.
- Mitchell, J. & Marland, P. (1989). Research on teacher thinking: The next phases. *Teaching and Teacher Education*, 5, 115-128.
- Mumme, J., & Weissglass, J. (1990). Improving mathematics education through school-based change. *Mathematicians and Education*, 2, 2-23.
- Orlich, D.C. (1989). *A study of elementary school science teaching*. Unpublished field study, Washington State University, Pullman.
- Orlich, D.C., Kauchak, D.P., Harder, R.J., Pendergrass, R.A., Callahan, R.C., Keogh, a.J., & Gibson, H. (1990). *Teaching Strategies*. D.C.: Heath Company.
- Palincsar, A.M., & Brown, A.L., (1984). Reciprocal teaching of comprehension-fostering and comprehension-monitoring activities. *Cognition and Instruction*, 1, 117-175.
- Pimm, d. (1987). *Speaking mathematically: communication in the mathematics classroom*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Pintrich, P.R., & DeGroot, E.V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology*, 82, 33-40.
- Pintrich, P.R., & Marx, R., & Boyle, R.A. (1993). Beyond cold conceptual change: The role of motivational beliefs and classroom contextual factors in the process of conceptu-

- al change. *Review of Educational Research*, 63, 167-199.
- Pintrich, P.R., & Schrauben, B. (1992). Students' motivational beliefs and their cognitive engagement in classroom academic tasks. In D. Schunk & J. Meece (Eds.), *Student perceptions in the classroom: Causes and consequences* (pp. 149-183). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Pirie, E., & Schwarzenberger, R. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 459-470.
- Renninger, K.A. (1992). Individual interest and development: Implications for theory and practice. In K.A. Renninger, S. Hidi, & A. Krapp (Eds.), *The role of interest in learning and development* (pp.361-398). Hillsdale, NJ; Erlbaum.
- Schunk, D.H. (1986). Verbalization and children's self-regulated learning. *Contemporary Educational Psychology*, 11, 347-377.
- Strain, P.M. (1982). Evaluation by the numbers. *Special Libraries*, 73, 165-172.
- Usnick, V.E. (1992). Multidigit addition: A study of an alternate sequence. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 14, 53-62.
- Vergnaud, G., Booker, G., Confrey, J., Lerman, S., Lochhead, J., Sfard, A., Sierpiska, A., & Wheeler, D. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Neshier, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. NY: Cambridge University Press.
- Villasenor, A., & Kepner, H.S. (1993). Arithmetic from a problem-solving perspective: A urban implementation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 62-29.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological process*. (Edited by M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman.) Cambridge MA: Harvard University Press.
- Weinert, F.E. (1987). Introduction and overview: Metacognition and motivation as determinants of effective learning and understanding. In F.E. Weinert, & R.H. Kluwe (1987). *Metacognition, motivation, and understanding*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Weinstein, C.S. (1988). Preservice teachers' expectations about the first year of teaching. *Teaching & Teacher Education*, 4, 31-40.
- Winograd, K. (1993). Selected writing behaviors of fifth grade as they composed original mathematics story problems. *Research in the Teaching of English*, 27, 369-394.
- Wood, T., Cobb, P., & Yackel, E. (1991). Change in teaching mathematics: A case study. *American Educational Research Journal*, 28, 587-616.



Bulletin of Educational Psychology, 1994, 27, 35~ 62
National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, R.O.C.

A STUDY OF THE EFFECTS OF TEACHING STRATEGIES ON JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS' LEARNING OUTCOMES IN MATHEMATICS WORD PROBLEMS

Chen-Shan Lin Ching-Yuan Chang

ABSTRACT

The purposes of this study were: 1) to design, according to the internalization theory, a mathematics teaching strategy program to deal with junior high students' misconceptions in mathematics word problems; 2) to examine the effect of this teaching strategy program on junior high students' learning outcomes in mathematics word problems. Eighty five subjects were drawn from Ying-Chyau Junior High School for qualitative analysis, and 45 subjects were drawn from Tien-Mu Junior High School for the study of experimental teaching. The instruments used were "metacognition Inventory", "Motivational Belief Inventory", and "Mathematics Test". The subjects of the Experimental Group I received both "Metacognition and Motivational Belief Training Course" and "Mathematics Word Problem Solving Strategy Training Course", but the subjects in Experimental Group II received the latter course only. The data thus collected were analyzed by qualitative analysis, one-way multivariate analysis of variance, and two-way ANOVA with mixed design. The findings were as follows: 1) The students had systematical misconceptions in mathematics word problems learning. 2) "Metacognition and Motivational Belief Training Course" could not affect the subjects' motivational belief immediately, however, it could affect immediately their metacognition. 3) The students' abilities in solving mathematics word problems were enhanced after they had accepted "Mathematics Word Problem Solving Strategy Training Course". 4) The subjects who accepted both the two training courses performed best in the follow-up stage. These results showed that understanding students' misconceptions could help teachers to design good teaching strategies, and that metacognition and motivational belief could promote students to study hard continuously.

Key words: mathematics word problem, metacognition, motivational belief

