國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
教育心理學報，2011，43 卷，閱讀專刊，291-314 頁

以分段方式降低任務複雜度對專家與生手閱讀幾何證明的影響*

左台益
國立臺灣師範大學
數學系

呂鳳琳
國立臺灣師範大學
數學系

曾世綺
佛光大學
學習與數位科技學系

吳慧敏
佛光大學
學習與數位科技學系

陳明璋
國立交通大學
通識教育中心

譚寧君
國立台北教育大學
數學暨資訊教育學系

本研究旨在探討將一個複雜的幾何證明用分段方式呈現，以降低任務的複雜度對專家與生手在認知負荷感受與閱讀理解之影響。依據數學結構及 Duval（1998）的推理資訊組織層次將幾何證明分成分段與未分段兩種文本方式呈現，並將專家（亦即，28 位準中學數學教師和 21 位中學數學教師）與生手（66 位八年級學生）隨機分派於不同呈現方式的組別中，以瞭解其認知負荷感受與閱讀理解的情形。研究結果顯示：（1）不論是對專家或對生手而言，證明文本以分段方式呈現，有助於提高其閱讀意願以及降低其閱讀證明時的困難度和所花費的心力，但對他們在閱讀理解的表現上，則未造成顯著差異。（2）不論證明文本以分段或未分段呈現，專家的閱讀意願與信心指數皆顯著高於生手，而其閱讀證明時的困難度和所花費的心力則顯著低於生手；且專家的閱讀理解表現也顯著優於生手。本研究依據研究結果，對幾何證明的後續研究與教學提出可能的教學策略與建議，以做為學術研究與教學實務工作者參考之用。

關鍵詞：認知負荷、閱讀理解、幾何證明

數學證明具有闡釋、溝通與確信的功能（Hanna, 2000），同時，在課室教學的實務中，也是促進數學理解的重要工具（Hanna & Jahnke, 1996）。德國數學家 Thurston（1994）指出數學家認為證

---

* 1. 本篇論文通訊作者：曾世綺，通訊方式：sctzeng@mail.fgu.edu.tw。

2. 本論文係呂鳳琳提國立臺灣師範大學數學所之碩、博士論文的部分內容，在左台益教授指導下完成。

3. 致謝：本研究承蒙行政院國家科學委員會專題研究計畫（計劃編號：NSC 96-2521-S-003-003-MY3、NSC99-2511-S-003-021-MY2）之經費補助及審查委員給予寶貴的修改建議與指教，特此致謝。

明之所以重要在於證明的過程能夠更有效地引領吾人理解數學內容的本質結構。數學證明過程除了透過已知條件來推論待證目標外，更重要的是在解釋說明數學思維的脈絡發展。Niss（2002）將數學推理列爲中學生應具備的八項數學能力之一，其中以理解他人的論點與抓取論點的核心概念爲數學推理的基本要求。是以，輔助學生理解證明內涵，一直是數學教學的研究課題。

國內外的數學教學，均十分重視推理證明的課程安排，例如，美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）即呼籲將「學習推理」與「構建證明」當成「理解數學」的一部分，而我國九年一貫數學領域課程也強調推理能力，且列入數學教育的主軸。雖然數學證明的理解與建構已成爲中學數學課程學習的基本要素之一，但由於數學證明牽涉邏輯推理、概念元素間互動的複雜任務，一般不易掌握數學證明的論證手法與涵義。Lin、Cheng 和 linfl team（2003）研究國三學生學習幾何證明的結果即指出，對國中生而言，學習幾何證明是相當複雜且困難的任務。早期數學論證的研究主要在探討如何發展學生數學證明的寫作能力以及分析學生做數學證明的困難因素（Holyes, 1997; Healy & Hoyles, 2000）。然而，即使學生認知數學證明在課堂中所扮演的功能以及意識到證明必須一般化，但學生仍習慣透過數值計算或是直觀等具體操作方式來驗證，而較少使用可被數學社群接受的論證方式來證明（Küchemann & Hoyles, 2006）。Hanna 和 Jahnke（1993）認爲要讓學習者接受一個經過證明的新定理證明，理解應重於論證的嚴謹形式。

近來數學論證研究開始注意數學證明的閱讀理解（Selden & Selden, 2003; 葉明達、柳賢，2007；Yang & Lin, 2008），Selden 與 Selden 即指出閱讀理論已將閱讀與寫作視爲一體。從數學證明的學習認知觀點來看，讀懂數學證明或許是在建構數學證明之前的工作，也就是說數學教學或許需要一個融合閱讀與寫作的教學策略，Yang 和 Lin（2008）從閱讀理解的觀點探討中學生在閱讀幾何證明的認知面向以及知識和邏輯對中學生幾何證明閱讀理解的影響，Österholm（2006）則探討數學文本的寫法（自然語言和符號語言）對大學生與中學生在閱讀理解的影響，該研究發現學生在閱讀含有數學符號的文本時，需要特定內容（學科）的讀寫能力並建議應有更進一步的閱讀理解教學策略之研究。幾何證明經常用來作爲引導中學生學習數學證明的入門課程，然而幾何圖形蘊含著豐富的訊息，除了提供學習者直觀的察覺，也易造成學習者解讀圖形上的困難，因此，在幾何教學上常需幫助學習者掌握其中所蘊含的脈絡訊息，而幾何教學往往比算術或基本代數教學來得複雜且不易成功的原因即在於，幾何證明的理解是一個需要高度認知要求的複雜過程（Duval, 1998）。如何降低幾何證明任務的複雜度，並瞭解它對閱讀內容的認知負荷及理解之影響是個值得研究的議題，亦是本研究所欲深入探討的主題。

教育心理學者 Mayer 與 Moreno（2003）認爲，因爲受到人腦處理訊息能力的限制，在教導新的概念內容時，若教材內容本身複雜且不易理解，可將教材做適當的分段切割（segmenting），以降低學習者的認知負荷。同樣地，Sweller （2010）也表示，所要學習的任務內容中，如果所包含的概念或程序這些元素（element）間的互動作用（element interactivity）過大，工作記憶將無法同時處理這些高度影響的元素內涵，此時若要學好任務內容，唯有將元素間的相關性先做區隔，分別學習後，再學習它們之間的關聯性。例如，Ayres（2001, 2006）指出對剛開始學習代數的學生在處理常數與一次式乘積 $a（bx+c）+d（ex+f）$ 展開運算的任務中，由於元素間具有高度的互動關係，可藉由工作例來引導學習者在每個步驟只做一組文數字乘積的計算（例如：$a \times bx = abx$），來隔絕與其他元素運算的相互影響（例如：連續計算四組乘積 $a \times bx + a \times c + d \times ex + d \times f$），以達成降低展開運算的複雜度之目的。綜合上述，本研究的目標即在探討以分段證明的呈現方式來降低幾何證明內容的複雜度，對專家與生手認知負荷與閱讀理解的影響，進而提出有助生手在閱讀幾何證明時的學習策略。

一、幾何證明閱讀理解

Duval（1998）根據符號系統的特徵，將幾何活動的認知歷程分為單純的圖形解析過程、自然語言的論證過程以及理論語言的論證過程，並指出在推論的過程中，資訊的形式除了受符號系統而有所不同，資訊的組織結構也會因訊息量的多寡而有所區別。Duval 依據推論過程中元素間互動的訊息量分成三種不同的資訊組織層次：（1） 微觀層次是指個體能夠辨識出單一命題或論點（例如，定義或定理）中的前提或結論；（2） 局部層次是指個體能夠依據命題的狀態將至少三種性質或過程組織起來；（3）整體層次是指個體根據整體的推論過程而能將每個步驟的子結論連結起來。

在本研究中，以現行的國中教科書中平行線截比例線段的證明作為題本內容。亦即，在ΔABC中，若$\overline{DE}$平行$\overline{BC}$，則$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$（參考圖 1）。基本上，此定理的證明是運用三角形面積與邊長比的關係推導平行線截等比例線段。

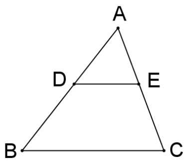


圖 1　平行線截比例線段圖

此定理在一般文本會以整體證明（未分段）方式呈現，不論在敘述或是圖形結構上都顯得相當冗長與複雜（參考附錄一）。依據整體證明的數學結構以及 Duval 的推理資訊組織層次，本研究將此複雜的證明分成三個局部證明再輔以整體結構（分段）方式呈現以降低證明的複雜度（參考附錄二）。為了探討分段與未分段證明的呈現方式對專家與生手閱讀理解的影響，在受試者閱讀完證明題本後，需要進行理解測驗以瞭解受試者在各層次的閱讀理解表現。在理解測驗部分，同樣根據 Duval 所提出的三個層次來設計理解測驗的題目。

二、認知負荷理論

認知負荷理論是由澳洲新南威爾斯大學的心理學家 John Sweller 及其研究團隊所發展的。Sweller、van Merriënboer 和 Paas（1998）表示認知負荷是指將一特定工作加諸於學習者的認知系統時所產生的負荷。當負荷超過個體所能負擔的範圍時，便會影響其學習成效。因此，認知負荷理論的設計即在提供一個能夠將訊息以某種形式呈現，降低學習者在過程中因認知負荷過重而感受到的挫敗感，以激勵學習者提高學習成效的教學方針。

根據教學設計以及訊息在工作記憶區中處理的難度和負荷感的來源，可將認知負荷分為內在認知負荷（intrinsic cognitive load）、無關的認知負荷（extraneous cognitive load）與有效的認知負荷（germane cognitive load）三種。依據 Clark、Nguyen 和 Sweller（2006）的解釋，內在認知負荷是指教材內容的複雜性對學習者所造成的心智負荷，主要取決於教學目標，而無關的或外在認知負荷是指加諸在學生身上，但與學習目標不相關且浪費有限認知資源的心智負荷（亦即，因教材內容設計不當，導致處理訊息時產生額外的心智負荷量），有效的認知負荷則是指在有助於達成教學目標的教學活動中，對學習者所造成的心智負荷。

中學生從經驗幾何過渡到推理幾何的歷程中，不僅需要處理大量的符號語言與邏輯判斷，還要辨識假設、從中提取已知條件和數學結構以及組織邏輯關係（Healy & Hoyles, 2000），解讀幾何圖形所蘊含的豐富訊息與數學結構（左台益，2007）。對初學者而言，每一項工作都需在工作記憶區中進行處理，易造成學習者在認知上的負荷，一旦超過學習者可負擔的認知負荷時，便會影響其學習成效。從認知負荷理論的觀點來看，閱讀幾何證明對初學者來說本身是件高內在認知負荷的任務，因此如何引導學習者有效的運用認知資源便成了本研究的所關心的課題，即當教材的內在認知負荷是不變的情況下，如何減少不必要的外在認知負荷，以釋放出工作記憶區的認知資源於增加有效的認知負荷。

三、認知負荷感受的測量

教學者經常透過訪談或問卷等方式來得知個體在學習的過程中所遭遇的困難或心智上所承受的壓力情形，並從中推測教材的設計或教學方式如何影響個體的學習與心態，以提出研究或教學實務上的建議。因此，認知負荷的測量方式成爲一項重要的議題。Paas 和 van Merriënboer（1994）指出認知負荷的來源包括任務或環境、學習者、任務與學習者的交互作用。而用於評估認知負荷因素有心智負荷（mental load）、心智努力（mental effort）與工作成效（performance）。所謂心智負荷是指因任務要求所帶給學習者的負荷程度，而心智努力是指學習者實際用於完成任務所付出的努力程度。其認知負荷結構關係如圖 2 所示。

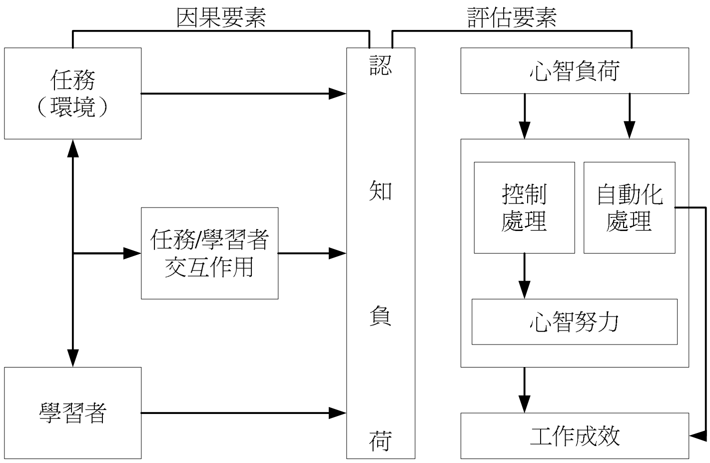


圖 2 認知負荷結構圖（引自 Paas & van Merriënboer, 1994）

Sweller 等人（1998）則進一步指出認知負荷的測量可分爲主觀測量、生理測量以及任務與績效的測量等三種方式。主觀測量是基於受試者能夠回顧與自我反省學習的認知歷程，由學習者評定本身的負荷後，選取較適合自己的尺度；生理測量是由於受試者所感受到的負荷會造成生理上的改變，因此利用測量血壓、腦波或眼動反應等方式來衡量受試者的認知負荷；任務與績效測量則是以任務的困難度和個體的學習成效來推論個體在學習過程中所承受的負荷感以及個體對任務所投入的程度。Paas 和 van Merriënboer（1994）發現主觀測量法在信效度及敏感度上都比生理測

量法來得好，且生理測量往往需要儀器輔助，研究成本較高，因此，1990 年代後期的研究多以七點或九點量表作爲認知負荷的測量工具，其中以 Paas 和 van Merriënboer 在 1994 年所編製的九點量表最被廣泛使用。而 Sweller 等人認爲採用主觀測量法來測量認知負荷是目前較可行的方式。

由於閱讀幾何證明對初學者來說本身是件高內在認知負荷的任務，因此，在本研究中我們將一個複雜的幾何證明過程依據其數學結構與 Duval（1998）的推理資訊組織層次做分段切割，以探討分段方式是否能有效降低學習者的認知負荷。Paas（1992）指出認知負荷是一種多向度的概念，且分爲心智負荷與心智努力兩種，當個體對於學習內容所知覺的困難度越高，或是個體覺得需要投入更多的努力來理解內容時，其認知負荷就會越大。在本研究中，我們要求受試者回報困難度與花費心力作爲心智負荷的檢測項目，另外，以實際所投入的努力來作爲心智努力的檢測項目，來瞭解分段方式對受試者的認知負荷所產生的影響。

此外，學習者在看到一個複雜且冗長的幾何證明時，往往會因認知負荷過重，在無法理解的情況下產生挫敗感，而此也會影響其閱讀意願與看懂證明的信心。楊凱琳和林福來（2009）提到學生在面對幾何學習的閱讀時，若帶有負面情感，可藉由外在環境的強化來獲得改善，不同的學習材料也會產生不同的學習動機。而 Hannula、Maijala 和 Pehkonen（2004）的研究中指出學習數學的過程中會受個體本身的數學相關信念所影響，特別是自信部分。Weber 和 Mejia-Ramos（2011）在探討數學家閱讀證明的動機與歷程的研究中發現即便是數學家亦是如此，Weber 和 Mejia-Ramos 指出數學家在閱讀證明中的敘述時，會對每個敘述賦予了解的程度，例如，確信了解證明中的第 i 個敘述的程度爲 p_i，若證明有 n 個敘述，則確信了解整個證明的程度爲 $p_1p_2p_3 \ldots p_n$，隨著證明敘述的增加，反而會使學習者更無法確信看懂整個證明，反之，若證明過程不多且在相對簡單的範圍內，看懂證明的程度相對就會提升。同樣地，Keller 和 Suzuki（1988）提到信心能夠幫助個體了解自己成功的可能性，若個體覺得無法實現目標或是成本（時間或精力）太高時，對完成任務的積極性將會降低。複雜的學習是一個漫長的歷程，需要考量到學習者的動機以及其知識的發展等因素（van Merriënboer & Sweller, 2005）。在本研究中，我們同樣採用主觀測量方式來詢問受試者的閱讀意願、信心指數、困難度、花費心力與投入努力作爲認知負荷感受檢測項目，以便探討分段方式對幾何閱讀理解整體的認知負荷感受的影響。

綜合以上所述，本研究目的在依據數學結構及 Duval 理論將幾何命題「平行線截比例線段」的證明分成分段與未分段兩種文本呈現，探討對專家和生手的認知負荷感受以及閱讀理解表現上的影響。根據研究目的而衍生出下列兩項研究問題：

（一）不同文本的呈現方式對專家與生手在認知負荷感受上的影響爲何？

（二）不同文本的呈現方式對專家與生手的閱讀理解有何影響？

研究方法

本研究採實徵研究量化分析方法，以下分別從研究設計、研究對象、研究工具、研究過程來說明研究方法。

一、研究設計

基於研究目的，爲了探討幾何證明的文本呈現方式與受試者的知識背景是否會影響其認知負荷感受以及閱讀理解。因此，研究者在進行幾何學習認知歷程與認知負荷理論等文獻探討之後，根據數學結構以及 Duval 的推理資訊組織層次將一個複雜的幾何證明以分段的方式呈現（附錄二），並以原先未經分段的幾何證明做爲另一個文本（附錄一），比較受試者在閱讀這兩種不同文本時的認知負荷感受及閱讀理解。同時，爲了比較受試者的知識背景是否也會影響認知負荷感受與閱讀理解，研究者根據受試者對證明內容的熟稔度作爲專家與生手的研究樣本，換言之，即比較專家與生手在閱讀幾何證明時的認知負荷感受與閱讀理解是否有所差異。

在本研究中，研究者以主觀測量法的方式，在受試者閱讀完證明後，以量表的方式來收集受試者的認知負荷感受，主要包括受試者對不同文本呈現方式的閱讀意願、困難度、花費心力、信心指數與投入努力等五個面向。而在閱讀理解部分，研究者依據 Duval（1995, 1998）的幾何認知理解模式與推理資訊組織層次設計試題，除了分別檢測受試者總體的閱讀理解表現之外，還進一步收集受試者的微觀、局部以及整體的理解情況。如圖 3 的研究架構所示。本研究以幾何證明不同文本的呈現方式和受試者的知識背景作爲自變項，受試者的認知負荷感受和閱讀理解作爲依變項，以二因子變異數分析來檢驗專家與生手在不同文本下的認知負荷感受與閱讀理解是否有顯著差異。

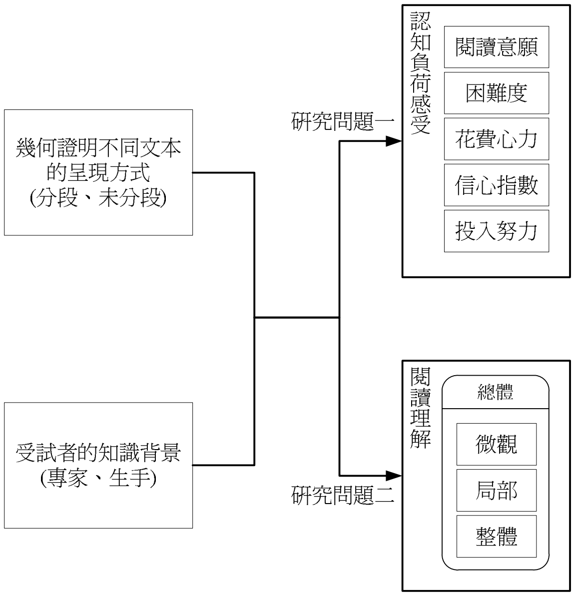


圖 3 研究架構圖

二、研究對象

研究者分別由台北縣市兩所國中隨機各取一班八年級學生，共 66 位學生作爲生手組的樣本。選取八年級學生的原因在於研究中對平行線截比例線段所採用的證明方法，其主要概念是以面積法和比例關係來推導，而相關的先備課程與概念均已在小學或國二下之前的階段學過。因此，對八年級下學期的學生來說，雖然未接觸過平行線截比例線段或相關的幾何證明，但具有足夠的基礎知識閱讀證明內容，相當適合作爲生手組的研究對象。另外，在專家組則是由 28 位修過高等幾何主修數學的準教師以及 21 位中學數學教師作爲研究樣本。在此所謂的專家並非是指數學家，而是能夠充分掌握中學幾何證明課程並經過嚴謹的數學訓練的對象，故以中學數學教師作爲專家組的樣本。而加入數學系準教師作爲專家組樣本的原因在於：

（一）與其他科系的大學生相比，數學系的學生有更多的機會接觸嚴謹的數學證明與訓練，譬如高等微積分或代數學等等。

（二）這些學生均修過一學期的高等幾何並且通過該課程的訓練，表示這些學生均具備一定程度的幾何知識與能力來處理國中的幾何課程。

（三）參與此研究的大學生中，多數爲修習數學教育學程的準教師，比起一般大學生來說，這些準教師對於中學數學課程的學習與內容更具有深入的瞭解。

三、研究工具

爲了探討幾何證明不同文本的呈現方式對專家與生手認知負荷與閱讀理解的影響，研究者分別設計兩種版本的幾何證明閱讀理解題本讓受試者閱讀，隨後再透過「幾何證明閱讀理解感受量表」與「幾何證明閱讀理解測驗」等評量工具來收集受試者的認知負荷感受與閱讀理解的表現。各項工具內容及編製過程說明如下：

（一）幾何證明閱讀理解題本

本研究採用之幾何證明主題爲平行線截比例線段的證明，採用此主題做爲閱讀題本的範例原因在於平行線截比例線段的證明主要的概念是以面積法和比例關係來推導，其相關課程與概念均已在小學或國二下之前的階段學過，對八年級學生來說有足夠的能力能夠進行閱讀。另外平行線截比例線段的完整證明包含了等高三角形的面積比等於邊長比以及同底等高的三角形面積相等的推導過程。因此不論在證明敘述或是圖形展示上都顯得相當冗長與複雜，於是研究者依據此證明的數學結構將整個證明過程分成三大區塊，並在最後應用三個區塊間的數學關係來整合平行線截比例線段的證明。

研究者首先參考相關文獻及教科書，並與數學和數學教育專家以及教育心理學者討論與修改閱讀題本的敘述和說明，接著研究者從台北市某國中隨機選取數學程度高、中、低程度各 2 名學生來進行預試。預試的目的在於檢測正式施測流程中可能發生的困難和瞭解語辭之使用對八年級學生而言是否恰當。預試的進行方式如同正式施測的流程，並在預試結束後分別對這六位學生進行訪談。訪談內容主要是詢問學生是否對題本、量表或是測驗上的敘述有不清楚之處，並請學生以自己的話語表達他所理解的意思，以確保學生並未誤解研究者所表達的語辭敘述。此外，也詢問這六位學生是否完整的將證明看過一遍以及閱讀與作答上的時間是否充足，以避免在正式施測

時，學生因為時間不足而影響其作答理解測驗的表現。在預試結束後，根據訪談所得的結果，對工具的內容及敘述進行細部修正。

（二）幾何證明閱讀理解感受量表

本研究之幾何證明閱讀理解感受量表採用李克氏尺度（Likert's scale）九點量表方式來檢測閱讀意願、困難度、花費心力、信心指數與投入努力等五個項目。其中，困難度與花費心力為反向題。本量表具專家效度，亦即，量表之每一項目先參照文獻（Paas, 1992; Paas & van Merriënboer, 1994）初步擬定後，再透過數學、數學教育專家以及教育心理學者，逐題討論修正，最後再依據預試後的訪談結果加以修正而成。在信度部分，本量表之內部一致性信度，經分析顯示其 Crobach's α 係數為.72，符合良好信度標準。

（三）幾何證明閱讀理解測驗

在題目設計上，為了瞭解學習者看完平行線截比例線段的證明後，對各閱讀理解層次的瞭解，因此針對微觀、局部以及整體層次分別設計問題來檢測。就微觀層次來說，研究者根據 Duval（1995）提出的構圖性理解以及知覺性理解來設計第一題與第二題，也就是檢測受試者是否能夠透過依據題目敘述的要求來完成構圖以及根據圖形結構來回答問題，例如要求受試者根據敘述「作 $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ 且 F 在 $\overline{AB}$ 上」畫出 $\overline{EF}$ 以及依據圖形所提供的訊息來表示 ΔEDB 的面積。而在第三題是根據論述性理解以及數值例來檢測受試者對單一敘述的理解，例如請受試者說明「因為 $\overline{DE} // \overline{BC}$，所以 $\overline{BH} = \overline{CK}$」成立的理由以及告訴受試者 $\overline{BH} = 3$，看受試者是否知道 $\overline{CK} = 3$ 以檢驗受試者對 $\overline{BH} = \overline{CK}$ 的理解。在局部層次上，則是以單一數學概念來檢測受試者對局部推理的瞭解，例如要求受試者證明等高三角形的面積比等於底邊比（$\frac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$）或是同底等高的三角形面積相等（$\Delta EDB\text{面積} = \Delta ECD\text{面積}$）。最後是整體層次的部分，研究者以受試者所閱讀的平行線截比例線段的證明為題目，並提供受試者足夠的選項來完成證明，想要瞭解受試者是否因閱讀不同版本而在證明過程上有不同作答方式（參考附錄三）。

研究者首先根據 Duval 的推理資訊組織層次進行命題，然後再與兩位數學家及數學教育專家逐題討論，針對題目的適切性與有效性提供修正建議，以確保題目符合理論架構的設計。此外，此測驗工具採用內部一致性信度考驗，整份測驗所得之 α 係數為.88，顯示此測驗工具同樣符合良好的信度標準。

理解測驗內容一共為六大題，其中一至三題在檢驗受試者微觀層次的理解，共 4 小題，每小題各佔 1 分，因此微觀層次的總分為 4 分；而四、五兩題在檢驗受試者對局部推理的了解，共 2 題，每題 2 分，故局部推理的部分佔 4 分；而第六題在檢驗受試者對整體結構的了解，此題 4 分，因此在理解測驗的總分為 12 分，表 1 為理解測驗各題的給分標準。

四、施測過程與資料分析

本研究採用紙筆測驗方式進行，首先對研究參與者隨機發放幾何證明閱讀題本與幾何證明閱讀感受量表，在對參與者說明完施測的目的及方式，便請受試者進行閱讀與填答感受量表，待受試者做完感受量表後舉手，研究者將回收題本與感受量表，並隨即給受試者幾何證明閱讀理解測驗，直到受試者舉手表示作答完畢，由研究者回收理解測驗以完成整個施測過程。

在資料收集完成後，由兩位數學系學生將受試者所勾選的感受量表數據先製成 Excel 檔，再由研究者做最後校訂，然後再透過 SPSS 軟體進行相關的統計分析。而在理解測驗的計分上，則是由兩位受過評分訓練的數學教育研究生分別對同一份試卷進行批閱，當分數差距大於或等於 1 分時，則與數學家及數學教育專家共同會商討論裁決，之後同樣請兩位數學系學生將理解測驗的分數輸入 Excel 檔案，並由研究者做校訂，然後使用 SPSS 軟體進行相關的統計分析。

表 1　理解測驗的各題給分標準

理解層次	題號	給分標準	分數
微觀層次	1	能正確畫出 $\overline{EF}$ ，有無畫出垂直符號並無關係，主要是檢測學生是否瞭解三角形的高是哪一條線段。	1
	2	能利用三角形面積公式表示 ΔEDB 面積，或自行用輔助線畫出三角形的高或底邊後，再用三角形面積公式正確的表達即可。	1
微觀層次	3（1）	能說出在兩平行線間的任意垂直線段均相等，或是以矩形對邊相等來說明 $\overline{BH}=\overline{CK}$ 即可。	1
	3（2）	檢測學生是否瞭解 $\overline{BH}=\overline{CK}$ 的意思。	1
局部層次	4	能夠做出兩三角形的高或是利用面積比等於邊長比。	1
		能夠完整的作出兩三角形共同的高且利用面積比得到邊長比。	2
	5	能夠指出 $\overline{BH}=\overline{CK}$ 或是利用面積公式說明兩三角形面積相等。	1
		能夠指出 $\overline{BH}=\overline{CK}$ 且利用面積公式說明兩三角形面積相等。	2
整體層次	6	能夠指出整個證明結構中所需的三個概念其中一種即可。 （1）$\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta EDB\text{面積}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$ （2）$\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ （3）$\Delta EDB\text{面積}=\Delta ECD\text{面積}$	1
		能夠指出整個證明結構中所需的三個概念其中二種。	2
		能夠完整指出證明中所需的三個概念	4

研究結果與討論

本研究旨在探討專家與生手對於閱讀分段證明（S 版本）與閱讀未分段證明（NS 版本）兩種版本，其認知負荷感受與閱讀理解是否會受版本因素或是受試者的知識背景而影響，並進一步探討在不同版本下，專家的認知負荷感受與閱讀理解之關係是否與生手的認知負荷與閱讀理解之關係有所不同。以下將從認知負荷感受、閱讀理解兩面向來論述本研究結果。

一、版本與受試者的知識背景對認知負荷感受的影響

研究者根據 49 位專家與 66 位生手在閱讀完證明後所回答的認知負荷感受量表數據而得到專家和生手在閱讀分段證明與閱讀未分段證明時的認知負荷感受，其統計結果詳見表 2。

表 2　專家與生手在不同文本下的認知負荷感受情形

知識背景	版本	閱讀意願	困難度	花費心力	信心指數	投入努力
專家						
	S	6.32（1.49）	2.52（1.69）	2.80（1.98）	8.80（0.41）	4.84（2.36）
	NS	4.62（1.64）	4.21（1.82）	4.67（1.79）	8.25（0.74）	4.83（2.10）
生手						
	S	4.97（2.43）	6.29（1.99）	6.16（2.19）	4.77（2.35）	5.58（2.22）
	NS	4.29（2.58）	7.00（1.78）	7.09（1.70）	4.03（2.20）	5.57（2.57）

註：括弧內的數值爲該組受試者的標準差

（一）版本與知識背景對受試者的閱讀意願之影響

爲了瞭解專家和生手在不同文本下的認知負荷感受之差異是否達統計上的顯著水準，因此研究者分別對閱讀意願、困難度、花費心力、信心指數與投入努力進行二因子變異數分析，首先是閱讀意願的部分，由於版本與受試者的知識背景在閱讀意願上的交互作用未達顯著水準，F（1，111）= 1.54，MSE = 7.20，p = .22，亦即版本對受試者的閱讀意願之影響並不會因受試者的知識背景而有所不同。因此進一步對版本與知識背景進行主要效果檢定發現閱讀不同版本的受試者在閱讀意願上的差異達到顯著水準，F（1，111）= 8.48，MSE = 39.65，p < .01，η^2 = 0.07[1]，表示受試者閱讀分段證明的意願（平均數 = 5.57）與閱讀未分段證明的意願（平均數 = 4.42）在統計上具有顯著差異且受試者對分段證明（S 版本）的閱讀意願顯著高於未分段證明（NS 版本）的閱讀意願。另外，專家與生手在閱讀意願上的差異達到顯著水準，F（1，111）= 4.29，MSE = 20.08，p < .05，η^2 = 0.04，從專家和生手的閱讀意願平均值顯示專家的閱讀意願（平均數 = 5.49）顯著高於生手的閱讀意願（平均數 = 4.61）。

（二）版本與知識背景對困難度的影響

其次是困難度的部分，從變異數分析的結果顯示版本與知識背景在困難度上的交互作用亦未達顯著水準，F（1，111）= 2.01，MSE = 6.72，p = .16，因此對版本與知識背景進行主要效果檢定，結果顯示受試者在不同版本下所感受到的困難度具有顯著差異，F（1，111）= 12.09，MSE = 40.36，p < .01，η^2 = 0.10，從受試者在不同版本下的困難度平均數可知受試者認爲分段證明的困難度（平均數 = 4.61）顯著低於未分段證明的困難度（平均數 = 5.86）。另外，專家與生手在閱讀證明時所感受到的困難度亦有顯著差異，F（1，111）= 90.51，MSE = 302.18，p < .01，η^2 = 0.45，根據專

[1] η^2 代表自變數能解釋依變數變異量的比例，其值介於 0～1 之間。Cohen（1988）提供下列準則以解釋 η^2 的強度：0.01 = 小效果、0.06 = 中效果、0.14 = 大效果。

家和生手所感受到的困難度平均值顯示，專家在閱讀證明時所感受到的困難度（平均數 = 3.35）顯著低於生手所感受到的困難度（平均數 = 6.67）。

（三）版本與知識背景對花費心力的影響

第三是探討版本與知識背景對花費心力的影響，結果顯示版本與知識背景在花費心力上的交互作用未達顯著水準，F（1，111）= 1.69，MSE = 6.23，p = .20，表示版本對受試者所需花費心力的影響並不會因爲受試者的數學程度不同而改變，如表 所列，不論對專家或生手來說，閱讀分段證明所需花費的心力均低於閱讀未分段證明所需花費的心力。因此直接對版本與知識背景進行主要效果分析得知，受試者在不同版本之間所花費的心力具有顯著差異，F（1，111）= 14.79，MSE = 54.67，p < .01，η^2 = 0.12，從受試者在不同版本下的花費心力平均值可知，閱讀分段證明的受試者所花費的心力（平均數 = 4.66）顯著低於閱讀未分段證明的受試者所花費的心力（平均數 = 6.10）。另外，在受試者程度部分則顯示專家跟生手在閱讀幾何證明時所需花費的心力具有顯著差異，F（1，111）= 63.44，MSE = 234.78，p < .01，η^2 = 0.36，其中專家花費在看懂證明的心力（平均數 = 3.71）顯著低於生手所花費的心力（平均數 = 6.65）。

（四）版本與知識背景對信心指數的影響

接著是信心指數的部分，由於版本與知識背景在信心指數上的交互作用未達顯著水準，F（1，111）= 0.09，MSE = 0.27，p = .77，因此直接進行主要效果考驗，結果顯示閱讀不同版本的受試者在信心指數上的差異接近顯著水準，F（1，111）= 3.77，MSE = 11.78，p = .06，表示在表 中，閱讀分段證明的受試者，其信心指數（平均數 = 6.57）與閱讀未分段證明的受試者（平均數 = 5.75）之間的差異接近統計上的顯著水準；而在知識背景對信心指數的影響則顯示專家與生手對看懂證明的信心程度上有顯著差異，F（1，111）= 3.77，MSE = 11.78，p < .01，η^2 = 0.58，由專家跟生手的信心指數平均值顯示專家對看懂證明的信心程度（平均數 = 8.53）顯著大於生手的信心程度（平均數 = 4.38）。

（五）版本與知識背景對投入努力的影響

最後是有關專家跟生手在不同版本下所投入的努力情況，分析結果顯示版本與受試者的知識背景在投入努力上並無顯著的交互作用關係，F（1，111）≈ 0，MSE ≈ 0，p = .99，因此直接進行主要效果考驗發現不同版本之間的受試者所投入的努力並無顯著差異，F（1，111）≈ 0，MSE = 0.002，p = .99；而專家與生手所投入的努力也未達顯著差異，F（1，111）= 2.81，MSE = 15.35，p = .10，表示受試者的知識背景對受試者在閱讀證明時所投入的努力並無顯著影響。

（六）版本與知識背景對認知負荷感受的綜合討論

研究者根據上述研究結果將版本與受試者的知識背景對其認知負荷感受的影響整理如下（詳見表 3）：

由表 3 顯示版本對受試者在閱讀證明時所感受到的困難度以及所需花費的心力不僅具有顯著差異且均達到中度以上的效果，而研究結果亦顯示閱讀分段證明（S 版本）的受試者對內容的困難度感受與所花費的心力均顯著低於閱讀未分段證明（NS 版本）的受試者。幾何證明的內容越是繁雜，對受試者而言，所感受到的困難度以及花費心力也就越高，是影響其認知負荷的主要來源之一。因此，不論是對專家或生手來說，在閱讀未分段證明時，工作記憶區在同一時間內所需處理的訊息量會比閱讀分段證明時來得多，因此在訊息處理的過程中，受試者需要花費較多的認知資源在訊息的處理與整合上，相對地，由於分段證明在工作記憶區中需要同時處理的訊息量不如未

分段證明來得繁重，所耗費的認知資源也就相對減少。此研究結果與 Ayres（2006）的結果一致，Ayres 以代數展開式爲例，探討隔絕內在元素互動策略對八年級學生在解題時的認知負荷，並將學生分成兩組，一組爲隔絕內在元素互動組，即學生一次只需處理單一的數字與代數運算，以隔絕元素之間的互動性；而另一組爲整合組，即學生需要同時進行四組數字與代數的展開運算。結果顯示不論學生的數學程度如何，均認爲隔絕內在元素互動有助於降低其認知負荷。

表 3　版本與知識背景對認知負荷感受的影響

	閱讀意願	困難度	花費心力	信心指數	投入努力
版本	✓	✓	✓		
知識背景	✓	✓	✓	✓	
交互作用					
結果描述	S > NS 專家 > 生手	NS > S 生手 > 專家	NS > S 生手 > 專家	專家 > 生手	

註：✓ 表示該變因具有顯著影響，> 表示前者的平均值大於後者的平均值且達顯著差距。

此外，由表 3 亦可得知受試者的知識背景不同會對其認知負荷感受造成顯著差異，且在困難度、花費心力與信心指數上具有高度的效果，結果顯示專家在閱讀意願與信心指數上顯著高於生手，而在困難度與花費心力上則顯著低於生手。生手的閱讀意願之所以顯著低於專家的原因可能是因爲幾何證明的內容和形式對生手來說過於生疏，不易與其現有的知識網絡進行連結，因此在訊息處理的過程中容易產生較高的認知負荷而影響生手的閱讀意願；相對的，專家在面對九年級的幾何證明時，由於專家具有豐富的相關知識基模與舊經驗，並易於從長期記憶區中提取，因此在訊息處理的過程中，鮮少對專家造成高度的認知負荷，因此在閱讀意願上會比生手要來得高。而在信心指數上亦是如此，由於專家在閱讀證明時，在工作記憶區中所處理的訊息是以基模的型態做自動化處理，因此有額外的認知資源用於基模的統整與連結，使得專家更有把握看懂證明內容，反之，生手在閱讀證明的過程中，若將所有的認知資源用於訊息的選擇和組織，而無法進行統整時，自然無法有十足的把握看懂證明。在困難度與花費心力部分亦是如此，專家不論是閱讀分段證明的 S 版本或是未分段證明的 NS 版本，都能因爲其長期記憶區具有豐富的知識基模，讓工作記憶區中所需處理的複雜訊息以基模的型態進行運作，而降低內容的複雜度以及認知資源的浪費；反之，生手可能因爲先備知識的不足以及相關的知識基模未形成網絡，因此在工作記憶區中的複雜訊息無法以基模的形態處理，而造成高度的認知負荷。

二、版本與受試者的知識背景對閱讀理解的影響

在閱讀理解方面，研究者根據 49 位專家及 66 位生手在理解測驗的得分來說明專家與生手在不同文本下總體的閱讀理解表現，並進一步根據閱讀理解層次分爲微觀、局部及整體表現，統計結果詳見表 4。

表 4　專家跟生手在不同版本下的閱讀理解表現情形

知識背景	版本	微觀	局部	整體	總體
專家					
	S	3.92（0.28）	4.00（0.00）	3.92（0.40）	11.84（0.47）
	NS	3.96（0.20）	4.00（0.00）	3.88（0.61）	11.83（0.64）
生手					
	S	2.61（1.36）	1.61（1.80）	1.19（1.58）	5.42（3.91）
	NS	2.77（1.29）	1.00（1.33）	1.49（1.76）	5.26（3.48）

註：括弧內的數值爲該組受試者的標準差

如同認知負荷感受的分析方式，研究者同樣對各層次的閱讀理解表現進行二因子變異數分析，研究者首先探討版本與知識背景對受試者在總體表現上的影響，之後再分別對微觀、局部及整體層次做細部分析。

（一）版本與知識背景對閱讀理解總體表現之影響

有關閱讀理解總體表現的分析結果顯示版本與受試者的知識背景在其總體表現上的交互作用未達顯著水準，F（1，111）= 0.02，MSE = 0.17，p = .88，換言之，版本對受試者的總體表現之影響，並不會因受試者的知識背景而有顯著不同。而進一步進行主要效果考驗發現版本對受試者的總體表現並無顯著影響，F（1，111）= 0.03，MSE = 0.2，p = .87，表示對閱讀分段證明的受試者而言，其總體表現（平均數 = 8.29）與閱讀未分段證明的受試者（平均數 = 7.93）並無顯著差異。然而，受試者的總體表現會因爲其知識背景而有顯著差異，F（1，111）= 148.69，MSE = 1185.42，p < .01，η^2 = 0.57，由表 4 的平均數可知專家的總體表現（平均數 = 11.84）顯著大於生手的總體表現（平均數 = 5.33）。

（二）版本與知識背景對閱讀理解微觀表現之影響

探討完版本與受試者的知識背景對其總體表現的影響後，進一步分析版本與知識背景對不同的閱讀理解層次之影響，以下分別從微觀、局部及整體表現來說明。首先是微觀的部份，由於版本與知識背景在微觀表現上的交互作用未達顯著水準，F（1，111）= 0.10，MSE = 0.10，p = .75，因此進行主要效果考驗，如同版本與知識背景對總體表現的影響，不同版本的受試者在微觀表現上並無顯著差異，F（1，111）= 0.26，MSE = 0.27，p = .61，而受試者的微觀表現也會因知識背景的差異而有顯著差異，F（1，111）= 42.38，MSE = 43.65，p < .01，η^2 = 0.28，由專家與生手在微觀表現的平均得分可知，專家在微觀層次上的表現（平均數 = 3.94）顯著優於生手的表現（平均數 = 2.7）。

（三）版本與知識背景對閱讀理解局部表現之影響

接著是局部表現的部份，結果顯示版本與知識背景在局部表現上並無顯著的交互作用關係，F（1，111）= 1.86，MSE = 2.64，p = .18。而在主要效果考驗上則顯示不同版本之間的受試者，其局部表現的差異未達顯著水準，F（1，111）= 1.86，MSE = 2.64，p = .18，表示閱讀分段證明的受試者（平均數 = 2.68）與閱讀未分段證明的受試者（平均數 = 2.22）在局部表現上的差異未達到統計上的顯著水準。但受試者的知識背景對其局部表現則有顯著影響，F（1，111）= 143.66，MSE

= 203.66，$p < .01$，$\eta^2 =$ 0.56，由專家和生手在局部表現的平均得分顯示專家的局部表現（平均數 = 4）顯著優於生手的局部表現（平均數 = 1.29）。

（四）版本與知識背景對閱讀理解整體表現之影響

最後是整體表現的部份，分析結果顯示版本與知識背景在整體表現上的交互作用未達顯著水準，F（1，111）= 0.46，MSE = 0.8，p = .5，而在主要效果考驗部份，版本對整體表現的影響未達顯著水準，F（1，111）= 0.25，MSE = 0.43，p = .62，可見閱讀分段證明的受試者（平均數 = 2.41）在整體表現的部分與閱讀未分段證明的受試者（平均數 = 2.46）並無顯著差異。但整體表現會因知識背景的不同而有顯著差異，F（1，111）= 106.15，MSE = 183.66，$p < .01$，$\eta^2 =$0.49，表示專家在整體層次上的表現（平均數 = 3.9）顯著優於生手的表現（平均數 = 1.35）。

（五）版本與知識背景對閱讀理解表現的綜合討論

根據上述研究結果，研究者將版本與受試者的知識背景對閱讀理解的影響統整於表 。

表 5 版本與知識背景對閱讀理解的影響

	微觀	局部	整體	總體
版本				
知識背景	✓	✓	✓	✓
交互作用				
結果描述	專家 > 生手	專家 > 生手	專家 > 生手	專家 > 生手

註：✓ 表示該變因具有顯著影響，> 表示前者的平均值大於後者的平均值且達顯著差距。

由表 可知，版本對受試者在各層次的閱讀理解表現並無顯著影響，換言之，閱讀分段證明的受試者與閱讀未分段證明的受試者不論是在總體表現或是較為細部的微觀、局部或是整體表現均無顯著差異。從表 5 專家和生手在不同版本下的閱讀理解表現來看，專家不論在哪個版本下，其閱讀理解表現均達到接近滿分的水準，並不會因為版本不同而造成其閱讀理解產生差異。然而，受試者的知識背景對其閱讀理解表現則具有顯著差異，且在效果量上均呈現高度的效果。微觀層次的表現會與受試者本身的先備知識以及透過受試者反思與統整相關的基模有關。然而，基模的統整並非在短時間內就能一蹴即成，因此，受試者在有限的時間內所閱讀的幾何證明，其微觀層次的表現主要會因其本身的數學程度而影響。受試者的先備知識並不會因版本的不同而有所改變，因此版本對微觀層次的表現並無顯著影響。而在其他層次的閱讀理解表現部分，專家不論是閱讀分段證明的 S 版本或是未分段證明的 NS 版本，其困難度和花費心力均在中間值 5 以下，顯示不論是哪個版本的證明，對專家來說均未超出其認知負荷量，反觀生手的部分，不管是分段證明的 S 版本或是未分段證明的 NS 版本，生手所感受到的困難度以及所花費的心力均超過中間值 5，可見對生手來說，不論是哪個版本均造成其高度的認知負荷，因而影響到閱讀理解表現。從認知的觀點來看，對專家而言，不論是證明的過程或是所運用的數學關係均是已知的訊息，因此，即便專家閱讀未分段版本的證明時，也能夠靈活地將焦點擺在局部的邏輯推理或是整體的數學結構與想法（Weber & Mejia-Ramos, 2011）。然而，對生手而言，除了整個證明過程與數學關係都是需要在工作記憶區中處理的新訊息外，更重要的是，生手缺乏像專家那樣能夠靈活的運用認知資源在不同推理層次的理解與經驗，因此，即便分段證明的方式降低了生手的認知負荷，但無法有效地將認知資源用於處理局部的邏輯推理或是理解整體的數學結構。

結論與建議

由研究結果顯示，不論是對專家或對生手而言，分段證明的呈現方式，有助於降低受試者對教材所感受到的困難度及所需花費的心力，然而對其學習成效並無顯著的效果。這或許因為受試者在閱讀分段證明時，同一時間內所需處理的訊息量減少，因此減低了受試者所感受到的負荷感。然而對生手而言，即使分段方式降低了其認知負荷，但負荷量對中、低程度的學生來說可能還是過重，或者無法有效地將認知資源用於理解局部推理與整體的數學結構，致使在學習成效上無法獲得顯著改善。反之，儘管未分段版本增加了專家的認知負荷，但總體來看，並未造成認知負荷過重的現象。此外，專家在閱讀證明的過程中，工作記憶區中所處理的均是從長期記憶區中所提取的已知訊息和基模，且專家知道如何在工作記憶區中處理這些訊息，因此，即便兩組專家在認知負荷有顯著差異，但卻不影響專家的閱讀理解表現。

在本研究中，我們從專家的數據發現如果教材的知識內容對個體來說是只需從長期記憶區中重新提取的已知訊息或基模時，未分段的呈現方式雖然會減少其閱讀意願、增加對教材困難度的感覺以及心力的花費，但不會影響其理解表現；而從生手的數據顯示當個體需要在工作記憶區中將已知訊息重組，產生新的訊息時，分段雖然會提升其閱讀意願、減少對教材困難度的感覺、和減少心力的花費，但卻不影響其理解表現，此或許與即便分段任務對生手而言還是太困難有關，當然，分段分得不夠細也是可能的原因。值得一提的是，專家在閱讀證明的過程中，懂得如何將一個複雜的證明過程切割成數個子證明，並找出該證明的數學想法，而這正是 Weber 和 Mejia-Ramos（2011）所認為的數學推理之核心過程，只是對生手來說，除了缺乏這種學習經驗與訓練外，如何有效地運用認知資源在局部與整體層次的推理上，本身就是一件複雜的挑戰。此研究結果與 Ayres（2006）的專家反向效應研究結果不盡相同，在本研究中，將幾何證明以分段方式呈現並未看到專家反向效應，同時，對學習效果也無顯著的助益。Ayres 的研究以具有學習經驗的同年級學生為對象，並得到不同數學程度的學生，在不同的教學策略下，會有相反的教學成效之結果；但本研究所採用的專家是對學習內容精熟且能夠充分掌握中學幾何證明課程並經過嚴謹數學訓練的準教師與中學數學教師，因此他們在成績表現上並不受教學策略所影響。

我們推測對於一個過於複雜的任務，使用分段的呈現方式雖然能提升學習者的閱讀意願以及降低其認知負荷，但對學習並未產生太大的效果。若要提升生手的閱讀理解能力，或許應引進其它的教學策略，例如：先引導學習者理解整個證明結構與目標以幫助其組織整個結構，或是給予練習讓學習者透過反覆操作以建立基模，當然這仍有待後續研究加以證明。此外，本研究僅針對平行線截比例線段證明的原題作閱讀理解層次的探討，並未加入概念轉移的檢測，因此無法得知哪一種版本較有助於學生的概念轉移，平行線截比例線段性質在後續的幾何證明單元中有相當廣泛的應用，因此建議在未來的研究中能夠加入概念轉移的教學與檢測，相信此對幾何證明的相關研究會更有助益。

參考文獻

左台益（2007）：**動態心像與幾何學習之研究（3/3）**。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（編號：NSC95-2521-S-003-004）。

楊凱琳、林福來（2009）：自我評估幾何證明閱埋解的程度與讀不懂時持續閱讀的意願之關聯性。**台東大學教育學報，20**（2），117-136。

葉明達、柳賢（2007）：建立判讀理解層級：高中生進行數學論證判讀活動困難之探討。**教育與心理研究，30**（3），79-109。

Ayres, P. L. (2001). Systematic mathematical errors and cognitive load. *Contemporary Educational Psychology, 26*, 227-248.

Ayres, P. (2006). Impact of reducing intrinsic cognitive load on learning in a mathematical domain. *Applied Cognitive Psychology, 20*, 287-298.

Clark, R., Nguyen, F., & Sweller, J. (2006). *Efficiency in learning: Evidence-based guidelines to manage cognitive load.* San Francisco, CA: Pfeiffer.

Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). New York, NY: Springer-Verlag.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (Eds.) (1993). Aspects of proof [Special issue]. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 329-331.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof concepts in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428.

Holyes, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 7-16.

Hannula, M. S., Maijala, H., & Pehkonen, E. (2004). Development of understanding and self-confidence in mathematics: Grades 5-8. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 17-24). Bergen, Norway: PME.

Keller, J. M., & Suzuki, K. (1988). Use of the ARCS motivation model in courseware design. In D. H. Jonassen (Ed.), *Instructional designs for microcomputer courseware* (pp. 401-434). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Küchemann, D., & Hoyles, C. (2006). Influences on students' mathematical reasoning and patterns in its development: Insights from a longitudinal study with particular reference to geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 581-608.

Lin, F. L., Cheng, Y. H., & linfl team (2003). The Competence of geometric argument in Taiwan adolescents. *International Conference on Science and Mathematics Learning, 12*, 16-18.

Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational Psychologist, 38*(1), 43-52.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project.* Retrieved December 1, 2010, from http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf.

Österholm, M. (2006). Characterizing reading comprehension of mathematics texts. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 325-346.

Paas, F. G. W. C. (1992). Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in statistics: A cognitive load approach. *Journal of Educational Psychology, 84*(4), 429-434.

Paas, F. G. W. C., & van Merriënboer, J. (1994). Variability of worked examples and transfer of geometrical problem-solving skills: A cognitive-load approach. *Journal of Educational Psychology, 86*(1), 122-133.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review, 10*(3), 251-296.

Sweller, J. (2010). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review, 22*(2), 123-138.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177.

van Merriënboer, J., & Sweller, J. (2005). Cognitive load theory and complex learning: Recent developments and future directions. *Educational Psychology Review, 17*, 147-177.

Weber, K., & Mejia-Ramos, J. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 329-344.

Yang, K. L., & Lin, F. L. (2008). A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 59-76.

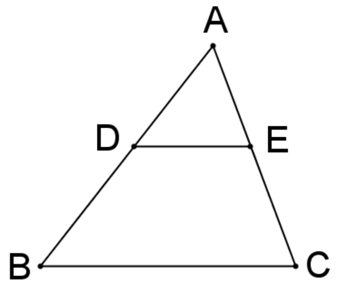
收　稿　日　期：2010 年 10 月 21 日
一稿修訂日期：2011 年 04 月 27 日
二稿修訂日期：2011 年 05 月 17 日
接受刊登日期：2011 年 05 月 17 日

附錄一：幾何證明閱讀理解題本(NS)

如右圖，在ΔABC中，

D在$\overline{AB}$上，E在$\overline{AC}$上且$\overline{DE}//\overline{BC}$，

試證$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。



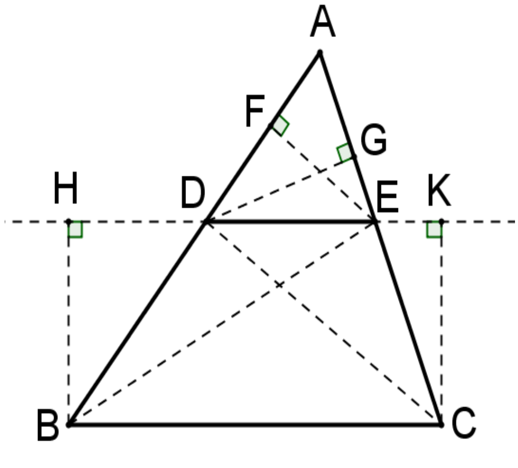
【證明】

1. 作$\overline{EF}\perp\overline{AB}$且$F$在$\overline{AB}$上。

2. $\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta EDB\text{面積}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{EF}}{\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$。

3. 作$\overline{DG}\perp\overline{AC}$且$G$在$\overline{AC}$上。

4. $\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{DG}}{\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{DG}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。



5. 作$\overline{BH}\perp\overleftrightarrow{DE}$且$H$在$\overleftrightarrow{DE}$上。

6. 作$\overline{CK}\perp\overleftrightarrow{DE}$且$K$在$\overleftrightarrow{DE}$上。

7. 因爲$\overline{DE}//\overline{BC}$，所以$\overline{BH}=\overline{CK}$。

8. 所以$\Delta EDB\text{面積}=\dfrac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{BH}=\dfrac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{CK}=\Delta ECD\text{面積}$。

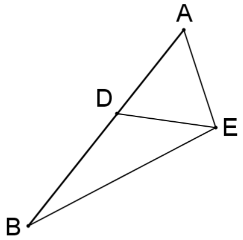
9. 因此，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta EDB\text{面積}}=\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$

附錄二：幾何證明閱讀理解題本（S）

例題一：

如右圖，在ΔABE中，D在$\overline{AB}$上，

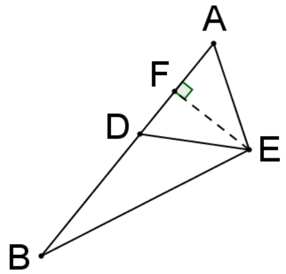
試證$\dfrac{\Delta EAD面積}{\Delta EDB面積}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$。



【證明】

1. 作$\overline{EF}\perp\overline{AB}$且$F$在$\overline{AB}$上。

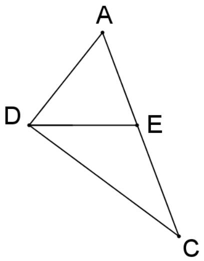
2. 所以$\dfrac{\Delta EAD面積}{\Delta EDB面積}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{EF}}{\frac{1}{2}\times\overline{DB}\times\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$。



例題二：

如右圖，在VACD中，E在$\overline{AC}$上，

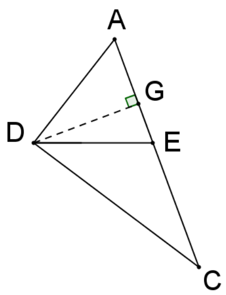
試證$\dfrac{\Delta EAD面積}{\Delta ECD面積}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。



【證明】

1. 作$\overline{DG}\perp\overline{AC}$且$G$在$\overline{AC}$上。

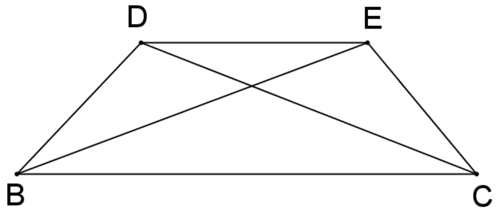
2. 所以$\dfrac{\Delta EAD面積}{\Delta ECD面積}=\dfrac{\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{DG}}{\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{DG}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。



例題三：

如右圖，$\overline{DE} // \overline{BC}$，

試證 ΔEDB 面積 $= \Delta ECD$ 面積。

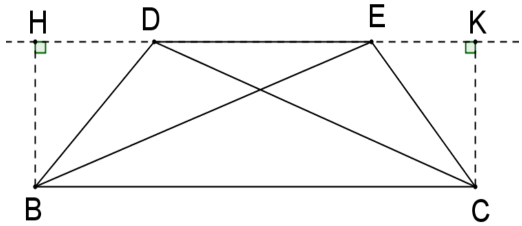


【證明】

1. 作 $\overline{BH} \perp \overleftrightarrow{DE}$ 且 H 在 $\overleftrightarrow{DE}$ 上。

2. 作 $\overline{CK} \perp \overleftrightarrow{DE}$ 且 K 在 $\overleftrightarrow{DE}$ 上。

3. 因為 $\overline{DE} // \overline{BC}$，所以 $\overline{BH} = \overline{CK}$。



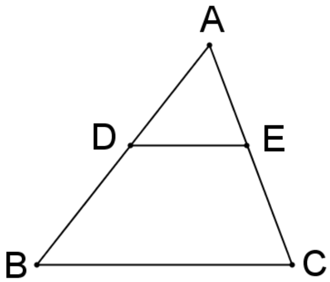
因此，ΔEDB 面積 $= \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{CK} = \Delta ECD$ 面積。

例題四：

如下圖，在 ΔABC 中，

D 在 $\overline{AB}$ 上，E 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{DE} // \overline{BC}$，

試證 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。



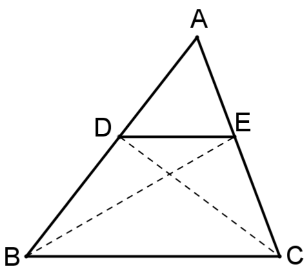
【證明】

1. $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta EDB\text{面積}}$。

2. $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}}$。

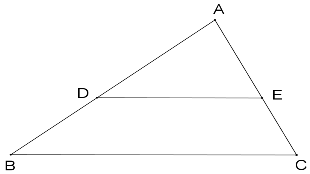
3. 因為 $\overline{DE} // \overline{BC}$，所以 ΔEDB 面積 $= \Delta ECD$ 面積。

4. 因此，$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta EDB\text{面積}} = \dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。

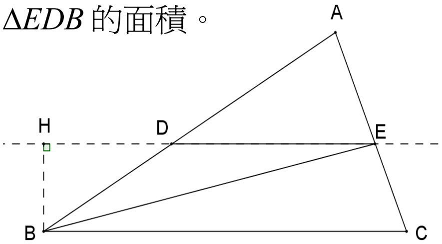


附錄三：幾何證明閱讀理解測驗

1. 請依據下列敘述「作 $\overline{EF} \perp \overline{AB}$ 且 F 在 $\overline{AB}$ 上」，在圖一中畫出 $\overline{EF}$ 。



2. 如圖二，$\overline{BH} \perp \overleftrightarrow{DE}$ ，請用一個算式表示 ΔEDB 的面積。

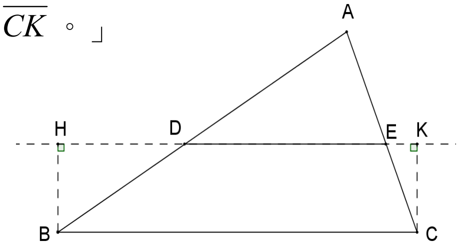


3. 請依據圖三回答下列問題：

(1) 請說明「因為 $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，所以 $\overline{BH} = \overline{CK}$ 。」

這個敘述成立的理由。

理由：



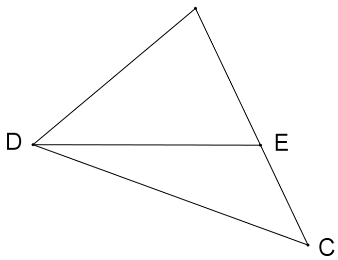
(2) 若 $\overline{BH} = 3$ ，則 $\overline{CK} =$__________ 。

4.

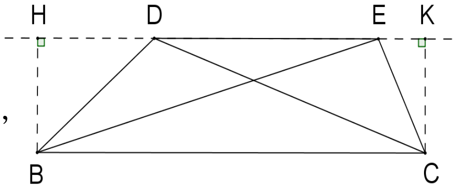
如圖四，在 ΔACD 中，E 在 $\overline{AC}$ 上，

試證 $\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ 。

證明：



5. 如圖五，$\overline{DE} // \overline{BC}$，



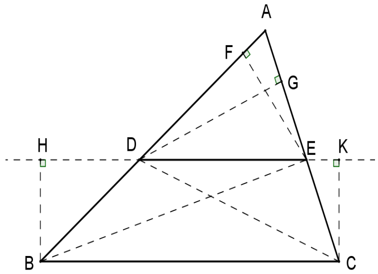
H、K 在 $\overleftrightarrow{DE}$ 上且 $\overline{BH} \perp \overleftrightarrow{DE}$，$\overline{CK} \perp \overleftrightarrow{DE}$，

試證 ΔEDB面積 $= \Delta ECD$面積。

證明：

6. 如圖六，已知 $\overline{DE} // \overline{BC}$，請證明 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。

(下面附有參考敘述，可供參考作答。)



<u>證明過程</u>：

註：下面 14 個敘述都是正確的敘述，不需要再證明(參考圖六)。你可以選取一些適當的敘述(或代號)來結構出 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ 的證明過程。

(1) $\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta EDB\text{面積}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$。	(8) $\angle ADE = \angle ABC$。
(2) ΔEAD 的內角和爲 180°。	(9) $\dfrac{\Delta EAD\text{面積}}{\Delta ECD\text{面積}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$。
(3) ΔEAD面積 $= \dfrac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{DG}$。	(10) $\overline{BH} // \overline{CK}$。
(4) ΔEAD面積 $= \dfrac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{EF}$。	(11) ΔECD面積 $= \dfrac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{CK}$。
(5) $\overline{HK} = \overline{BC}$。	(12) ΔBCD面積 $= \Delta BCE$面積。
(6) ΔECD面積 $= \dfrac{1}{2} \times \overline{EC} \times \overline{DG}$。	(13) ΔEDB面積 $= \Delta ECD$面積。
(7) ΔECD面積 $= \Delta KCD$面積 $- \Delta KCE$面積。	(14) 因爲 $\overline{DE} // \overline{BC}$，所以 $\overline{BH} = \overline{CK}$。

Bulletin of Educational Psychology, 2011, 43(Special Issue on Reading), 291-314
National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, R.O.C.

Impact of Reducing Task Complexity by Segmentation on Experts' and Comprehension of Novices' Reading Geometric Proof Problems

Tai-Yih Tso
Department of Mathematics
National Taiwan Normal University

Feng-Lin Lu
Department of Mathematics
National Taiwan Normal University

Shyh-Chii Tzeng
Department of Learning and Digital Technology
Fo Guang University

Huei-Min Wu
Department of Learning and Digital Technology
Fo Guang University

Ming-Jang Chen
Center for General Education
National Chiao Tung University

Ning-Chun Tan
Department of Mathematics and Information Education
National Taipei University of Education

This study aimed to investigate whether reducing task difficulty by segmenting a complex geometric proof would have a differential influence on experts' and novices' cognitive load and reading comprehension. Based on mathematical structures and the theory of reasoning with organization (Duval, 1998), two versions (i.e., segmented and nonsegmented) of a print-based geometric proof were created. Forty-nine experts (i.e., 28 pre-service and 21 in-service math teachers) and sixty-six novices in their eighth-grade year were randomly assigned to either a segmented or non-segmented group. Results showed that for both experts and novices, segmentation helped increase their reading willingness and to lower their perceived task difficulty and cognitive demandingness of task. Segmenting or not, however, would not make a statistical difference with respect to participants' reading comprehension. Additionally, irrespective of versions of text read, experts' reading willingness and confidence level were significantly higher than those of the novices. Experts' perceived task difficulty and cognitive demandingness of task were significantly lower than those of the novices. Also, experts were found to comprehend the geometric proof significantly better than novices. Based on results of the study, future research and instructional strategies for teaching geometric proofs were proposed.

KEY WORDS：cognitive load, geometric proof, reading comprehension