國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
教育心理學報，民 98，41 卷，1 期，125－146 頁

影響六年級學生立方體計數表現的因素—空間定位與視覺化的角色*

張碧芝
桃園縣龜山鄉
山頂國民小學
級任教師

吳昭容
國立臺灣師範大學
教育心理與輔導學系

立方體計數作業常被用來測量空間能力，也是數學課程中空間與圖形領域的學習活動，本研究以六年級學生為受試者，探討空間定位與視覺化能力對該作業表現的影響。材料分為高、低規律兩類型，低規律題操弄隱藏立方體個數（分 4、5、6、7 個隱藏個數），隱藏立方體分佈的零散程度（分二向度及三向度）。高規律題分為外形完整與不完整兩類。研究採紙筆團體施測收集 204 名學生的正確率，以及個別施測測與訪談收集 40 名學生的正確率、解題時間、主觀難度的評定，與解題策略。結果，學生解題的正確率、時間，和主觀難度，在高規律題上的表現優於低規律題，隱藏向度二的表現優於向度三，而隱藏個數的效果並不明顯，且立方體外形的完整與否並不影響正確率與解題時間，顯示影響學生立方體計數表現的因素，除了 Ben-Haim 等人（1985）與 Battista 和 Clements（1996, 1998）所主張的，從 2D 圖形轉換成 3D 的表徵理解能力，以及協調各視點以對隱藏部份立方體產生心像的定位能力之外，對六年級學生而言，群組與挪移等動態心像操弄的視覺化能力更為關鍵。

關鍵詞：立方體計數、空間定位、空間能力、空間視覺化、群組

我們生活在一個三度空間的世界，空間能力不只是適應生活情境所必須的，且是機械、建築、化學、外科手術、丈量員、製圖師等專業的重要技能（Shea, Lubinski, & Benbow, 2001），同時也與數學表現存在著 .3至 .6的正相關（Brown & Wheatley, 1989; Clements & Battista, 1992），因此國內外的中小學數學課程均將空間能力列為幾何教材之一（教育部，民82，民92；O'Driscoll-Tole, 1998; NCTM, 1989; 2000）。由於人們常需要把3D 的訊息（例如建築物內部結構）記錄成2D，並在傳遞後使另一個人能從2D 的圖形形成3D 的內在表徵，所以能在2D 與3D 間轉換是空間能力的重要成分。

立方體（cube，亦稱正方體）積木不但可以作為體積的基本單位，用來介紹體積概念，同時以紙本呈現立方體積木堆疊的圖形要求計數的作業，也被用來測量或促進立體幾何物件的心像與操弄能

* 本文係改寫自張碧芝提國立台北師範學院教育心理與諮商研究所之碩士論文，在吳昭容指導下完成，曾在 95 年臺灣心理學年會發表部分發現。通訊作者：吳昭容，通訊方式：cjwu@ntnu.edu.tw。

力。立方體計數作業對於發展有價值的數學技巧而言是相當重要的，但學生卻常感到困難（Battista & Clements, 1996, 1998; Olkun & Knaupp, 2000）。大樣本的評量報告（National Assessment of Educational Progress, 簡稱 NAEP，引自 Ben-Haim, Lappan, & Houang, 1985）指出9、13、17歲的學生在填答堆疊成長方體的立方體個數時，其正確率都不到50%，顯示即使是規則堆疊的立方體、即便是年紀較長的學生，立方體計數仍然是個困難的作業。本研究的目的即在分析立方體計數作業涉及的是何種空間能力，尤其對六年級學生而言，是哪些認知因素會影響立方體計數的難度，以及他們採用了哪些策略解題，這些探究將可以提供測驗使用與課程安排上的建議。

一、空間能力的內涵與測量

早期心理學家以因素分析的技術發現了「空間能力」是人類心智能力之一，此後便有學者陸續提出數種不同的空間能力因素，大致上都包含了空間視覺化（spatial visualization）以及空間定位（spatial orientation）兩種類型。

McGee（1979）指出視覺化是指能在心理操作、旋轉，或翻轉幾何物件的能力；而定位是指能理解視覺刺激型式的內部安排，且不受方位改變而混淆的能力。Linn 和 Peterson（1985）以後設分析的方法提出三種空間能力：空間知覺，指個體能不受訊息的干擾確認有關自身方向的空間關係；心理旋轉，指個體能在心理快速且正確的旋轉二度或三度空間的圖像；空間視覺化，涉及對於空間資訊複雜且多階段的操作能力。其中，空間知覺即與 McGee 的空間定位有關，而後二者都和視覺化有關。Reio、Czamolewski，和 Eliot（2004）認爲空間能力是一種個體能在心理上呈現出空間關係以及能預測、運用空間關係轉換的過程與結果的能力，此定義同樣顯示空間能力涵蓋了空間定位與空間視覺化兩種類型。

Eliot（1980）將所收集的三百多種商業用、已發行，或研究用的空間能力測驗加以分類，分成比對的（matching）和操弄的（manipulative）兩大類，前者下分五種不同類型，例如複製、記憶，或尋找鑲嵌在複雜圖形中的圖案等，主要的作業要求與圖形的辨識、儲存，與比對有關。後者則下分七種不同的類型，包括物件旋轉、紙張摺合、透視等，立方體計數作業也在其中，涉及的是與心像操弄有關的能力。蔣家唐（民84）部分修改了 Eliot 的分類，使得圖形辨識（recognition）包含複製、鑲嵌、記憶、完成，與平移等五種能力，而圖形操控則包括積木計數、旋轉、摺合、拆解，和透視等五種能力，並據此編製了一套視覺空間能力測驗。蔣家唐更進一步指出立方體計數可以說是由簡易的、二度空間運作、靜態的圖形辨識能力，過渡進入到複雜的、三度空間、動態的圖形操控能力的一種作業。

二、立方體計數的相關研究

Ben-Haim（1985）爲設計空間視覺化測驗，並檢核教學介入的效果，而參考1983年密西根教育評量（Michigan Educational assessment program）中立方體計數試題的選項設計。題目是以立方體積木堆疊而成的長方體2D 圖示，要求學生選出組合出該立體圖形所需的立方體個數，選項除了正確答案之外，另外四個誘答選項的設計原則是（1）看得到的面數；（2）以看得到的面數乘以2；（3）看得到的立方體數；（4）以看得到的立方體數乘以2，例如4 × 2 × 3長方體除了正確答案24之外，選項（1）至（4）依序爲26、52、18、36。

Ben-Haim 等人（1985）認爲學生主要的困難有二，一是能否以三度空間的方式理解平面的圖示，選項（3）、（4）數算的是立方體數，代表可以理解平面圖形是在表示立體的物件，而類型（1）、（2）則否；另一個困難是有否考慮到隱藏著的立方體，選項（2）、（4）是將看得面數或立方體數乘以2，

代表能考慮到還有隱藏的立方體，類型（1）、（3）則否。該研究以三個地區的五到八年級學生（各年級爲一百多人至四百多人不等）進行教學實驗，教學前四個年級的正確率依序約爲25%、40%、45%、50%，與1977-78 NAEP 的調查127420名七年級學生的平均正確率爲47%之結果大致吻合。四種錯誤類型（1）至（4）的選答率分別約爲17%、22%、8%、8%。

雖然 Ben-Haim 等人（1985, p. 406）認爲前述的錯誤顯示學生在空間視覺化能力上的困難，但從前文有關空間能力的回顧，此種較爲靜態的、立體表徵問題的能力，多半被歸類爲空間定位能力。此外，本文作者認爲他們交叉設計的四個誘答選項在邏輯與誘答力上可能有問題。如果學生無法區分圖形上的平面表徵和立體表徵，那麼點數平面圖形數的受試者是不可能會設想有一些圖形隱藏在後而加以乘上2倍，因爲後者的想法是立體的觀點，也就是能考慮到隱藏個數的人，必然要至少理解圖形是在表徵立體物件的，所以，邏輯上不應該存在選項（2），但實徵上選擇（2）的人數相當多，那麼這群受試者的困難就很難有合理的解釋了。此外，選項（4）是以可見立方體數目乘以2，來誘使那些知道有一些隱藏立方體但無法正確表徵與計數的學生選答。本文作者認爲，能區分圖形中立方體與正方形表徵的受試者已經初步具備掌握立體物件的能力，即使他們無法精確對隱藏立方體形成心像，但可能會因爲長寬高的比例而影響他對於隱藏個數的推估。亦即長寬高比例越接近1：1：1的，例如6 × 6 × 6，用可見立方體個數乘以2（91 × 2＝ 182）所設計的選項（4），可能尚覺得不夠（標準答案是216）。相反地，當其中一維遠大於其它二維的型態，則乘以2可能太多，例如6 × 2 × 2，同法設計的選項（19 × 2 ＝ 38），則覺得太多（標準答案24）。也就是選項（4）一律以可見立方體數乘以2加以設計，沒有考慮到能夠辨識立方體表徵的受試者可能具備對隱藏個數的粗略推估能力，而使得該選項的誘答力不高。

Battista 和 Clements 則進行了一系列立方體計數研究，提出空間結構化（spatial structuring）、心智模型（mental model），和基模（scheme）這三個心理機制關係著立方體計數的推理（Battista, 1999; Battista & Clements, 1996）。空間結構化是建構一個立體物件的歷程，它藉由辨識物件各個成分與統整各成分而決定了物件的形體或本質。此一歷程包括建立單位、建立單位間的關係（如相對位置），以及認知到若能正確地重複物件的部分就能產生整體，例如重複複製「行」就可產生完整的長方體。心智模型是由物理情境活化的一種非語言、栩栩如生的心像，使個體在行動或思想的過程中得以用來解釋或推理。基模則是一組有組織的行動或操作的序列，是抽象自經驗，使得可以在相似的環境中做出同樣的回應。

Battista 與 Clements（1996）指出學生在心中建構3D 長方體有四個發展階段。階段一「視點的拼湊」（medley of viewpoints），是一個時間點只注意到一個表面，而以拼湊視點的方式來知覺3D 的結構，其空間組織是局部性的。在階段二「合成單位」（composite units），學生可以形成合成單位並進行心理運作，但此合成單位不一定恰當，若學生能以3D 的小單位組織而成的合成單位會較2D 所組成的合成單位適當。然而即使有些學生能分辨所看到的「正方形」和所要計數的「立方體」間的差異，但計數立方體表面的複雜過程常會讓學生忘了留意兩者之間的差異，特別是在計數位於柱體邊緣的立方體表面時，由於不同的表面呈現的是同一個立方體，因此需要的是階段三「協調」（coordination）的能力，以調和柱體表面所形成不同的視角，例如柱體的正面和右側、上面和左側等直角訊息的調和，瞭解位於柱體邊緣的立方體表面所呈現的是相同的立方體才能正確計數。到了階段四「整合」（integration），學生要能將所有分離的視角聚集在一起以形成物件的全貌，而此階段包含了兩種不同的心理機制。第一個過程是回憶，使個體得以活化過去經驗而在心中存有的心智模型。在面對一個物件時，個體將真實物件的不同視點與心中先前存在的模型做比對，以活化適當的心智模型。倘若無合適的心智模型，則藉由第二個心理機制—基模，個體便開始進行一系列整合與轉化的操作以產生新的心理物件。

Battista 和 Clements（1996, 1998）個別訪談45名三年級與78名五年級學生的計數表現，材料是堆疊成長方體的立方體圖示，發現有五種不同的策略。策略一爲以「層」爲單位思考，學生會以長方體的水平或垂直「層」爲單位思考，而計數「層」的方式可能是一一點數或重複的累加或是以乘法進行，是正確率最高的一種。策略二爲視長方體爲一個填滿的空間，指學生會嘗試計數長方體內部及外部的立方體個數，可能以「行」或「列」作爲計數立方體的單位，也可能以隨機的方式無系統的計數，但通常錯誤率超過一半。策略三是就長方體的表面思考，亦即學生只會計數呈現在長方體可見面上的小立方體個數，而忽略內部的小立方體個數，常會重複計數長方體邊上的立方體個數，錯誤率亦高。策略四是使用體積公式，雖然學生會使用體積公式 L×W×H 的策略來做計算，因有些學生無法解釋爲什麼要將三個數字相乘，所以不表示能瞭解公式的意義。第五種則指除了上述的四種策略外的其它策略，包含體積公式的誤用，例如用來相乘的數字並不符合長方體各邊的個數。

Battista 和 Clements（1996）發現，能以層爲計數單位的學生可以有較高的正確率，五年級約有60%，但三年級則低於20%，而且所有三題都能正確以此策略作答的五和三年級學生更僅有29%和7%，顯示即使是五年級學生要能以層爲計數單位仍有困難。相反地，約有60%的三年級和20%的五年級學生採用僅數長方體表面個數的策略三。重複計數的情況相當常見，三題中至少出現一次的三年級有64%和五年級21%，而三題都一再重複計數的的分別爲33%和6%。

前述 Battista 和 Clements（1996, 1998）、Ben-Haim 等人（1985），以及 Olkun 和 Knaupp（2000）都以立方體堆疊成的長方體，或只有堆疊長、寬、高三軸度所形成的骨架爲材料，目的在探究個體如何從2D 圖形建構出3D 的心理物件，從空間能力的回顧可以發現，這通常被歸類爲空間定位。亦即前述幾組的研究人員認爲，立方體計數作業的錯誤產生自無法以心像將2D 的圖形轉換至3D 或無法正確協調柱體直角的視點，其中包含未能考慮到隱藏立方體的透視能力。

然而，不論智力測驗（蔣家唐，民83；陸偉明，民89；Eliot, 1980）或數學課程中有關立方體計數的作業，都不僅只是規則堆疊成長方體的圖形，有更多試題是不規則的堆疊類型。完成這類試題所需的能力，同樣是空間定位能力嗎？抑或是其它種類的空間能力？尤其我國數學課程爲了建立學生體積概念與測量的能力，在六年級之前均已完成類似於 Battista 與 Clements 所採作業的教學內容，讓學生具體地透過小白積木的堆疊認識長方體體積的意義與計算。依據 Battista（1999）與 Olkun 和 Knaupp（2000）的教學研究，這類課程的確可以協助大部分學生發展出空間定位（或稱爲空間結構化）能力，也就是使學生能夠區辨立方體與表面的正方形之間的差異、轉換2D 圖形以在心裡建構出立體物件，並能辨識各立方體在空間上的相對位置。如果，立方體計數作業僅涉及空間定位的認知歷程，那麼，六年級學生在不規則立方體堆疊類型的正確率應該會很高。相反地，假如學生仍有困難，其困難來自何種認知機制？

三、前導性研究發現與研究假設

爲探討六年級學生立方體計數作業中空間能力的特性，尤其是不規則堆疊類型的結構如何影響表現上的差異，用以推論其內在的認知歷程，我們進行了一個前導性研究，蒐集教學與測驗上常見的不同類型試題共12題，於2005年9月中旬施測一個六年級班級的6名數學成就不同的學生。該群學生自四年級開始接受九年一貫的數學領域課程，在施測前，學生已經接觸過的教材包括：利用各積木堆疊造型並數出各積木的數量、利用相同數量的全等積木堆疊不同的形體、利用不同數量的全等積木堆疊並比較形體的大小，以及透過積木的堆疊複製指定的長方體、正方體，並進行體積的間接比較和解決體積的問題。

研究採個別施測，首先呈現一張12道試題的試卷，請學生「數一數每個題目有幾個立方體，你可以用任何方法來計算，也可以隨意在紙上做紀錄」，並告知沒有作答時間的限制。第一作者爲施測

者，過程只做觀察與紀錄。紙筆測驗結束後進行訪談，請學生說明他是怎麼算的。

結果發現，學生在規律性較高的立方體堆疊方式中，通常會將物件劃分為數個不同大小的長方體，利用體積公式「長×寬×高」算出各個長方體的立方體數目後再累加；而規律性較低的堆疊方式，則多採點數方式，或是部分用乘法的體積公式，再加或減幾個零星的立方體，六位受試者均未見以平面正方形數取代立方體數的錯誤。這一方面顯示學生的確具備必要的視覺結構化能力，能理解平面所表徵的立體物件，另一方面也顯示了堆疊的規則性會影響解題的行為，規則性高的立體物件容易運用體積公式，解題表現的好壞與空間能力的關係較弱，相對地，規則性較低的試題則必須運用空間能力加以想像或操弄，故正式研究將試題分為高規律與低規律兩種試題類型，前者外形最少可以分成三個長方體，而後者則相對地比較畸零，詳細說明見方法的「研究材料」。

根據前導性研究的結果，本文作者認為，混淆2D 與3D 表徵（如 Ben-Haim 等人，1985的主張）或是欠缺協調柱體邊緣同屬一個立方體的不同面之能力（如 Battista 與 Clements，1996的階段二），已經不是六年級學生的問題。如果困難主要來自上述兩種因素，則高規律與低規律題的表現應該一樣差。**研究假設一**預測高規律題相較於低規律題會有較高的正確率、較短的解題時間、較低的主觀難度，且高規律題的正確率會相當高。檢驗此一假設的目的在確認六年級學生立方體計數如果有困難，其原因不是文獻上所提的表徵混淆或欠缺協調能力。

我們認為影響六年級學生立方體計數表現的，是在於能否形成隱藏之立方體的心像，以及操弄與挪移零散的立方體以組成數量較少的群組，而能分別用體積公式求算後快速地加出答案。前者心像的產生與各成分相對關係的掌握有關，屬空間定位，後者心理操作則屬視覺化，研究中分別採用三個操弄加以檢驗。

空間定位包括正確形成心像的能力，如果被其它立方體所遮蔽的立方體個數越多，會造成較差的表現，則顯示六年級學生的空間定位能力仍是影響其計數表現的因素之一。所以，我們在低規律題操弄隱藏個數，並提出**研究假設二**，預測立方體隱藏個數越多，則學生要形成心像的難度越高，所以會正確率較低、費時較長、主觀難度也較高。

空間定位還包括掌握各成分間的相對關係，如果物件的外形配置顯得比較完整會使得隱藏的部分容易被忽略，那麼與掌握各成分相對關係的空間定位能力，就可能是影響六年級學生表現的因素之一。所以，我們在高規律試題操弄外形的完整性，並提出**研究假設三**，預測外形完整的試題容易忽略隱藏的部分而產生漏數，故其正確率會較低、費時較長、主觀難度也較高。

另外，視覺化牽涉到操弄心像的能力，而本研究的材料不是一個規則的長方體，一一點數這類物件，速度較慢且需耗費心力來記憶是否計數過，所以解題者可能群組立方體成為有限個數的組塊，也就是增加或減少某些立方體間的心理距離，使之形成數個方便計數的組塊。甚至將零星的立方體挪移到其它不完整的長方體組塊上，使之可以運用體積公式「長×寬×高」來計數，即使挪移後的長方體仍是不完整或超過，也可以再用減法或加法加以刪增。這樣的解題行為顯示，越是結構不規則的試題，個體越需要運用視覺化能力來進行心理操弄，而隱藏的立方體分佈得越零散，其外形就越不規則，所以隱藏的立方體分佈在三個軸度的，會比分佈在兩個軸度（詳見方法中的「研究材料」）的物件來得更需要視覺化能力。所以，我們在低規律題操弄隱藏立方體分佈的向度數，**研究假設四**預測分佈在三向度的會比二向度的來得正確率較低、費時較長、主觀難度較高。

本研究採用了三類與解題難度相關的依變項：正確率、解題時間、主觀難度，據以推論解決立方體計數作業的認知歷程。同時測量三種依變項，是考量到不同依變項的敏感度可能不同，比較自變項在多種依變項上的效果，能使資料解讀時有相互對照的機會。由於解題時間與主觀難度必須採個別施測，但個別施測的受試者人數較少，故同時以團體施測收集樣本數較大的正確率資料。故研究程序上分團體施測與個別施測兩個部分，團測採紙筆測驗收集正確率資料，個測則分兩階段進行，

第一階段在不干擾受試者解題歷程的情況下，蒐集正確率、反應時間，以及對試題難度的主觀評價，第二階段則逐題訪談學生解題歷程，以瞭解其計數策略。爲減少練習效果，故個測與團測採用不同的受試者。

由於研究目的不在推估有多少學生能正確解題，而是透過比較不同試題操弄對解題表現的影響來推估立方體計數的認知歷程，且所有受試者都接受所有的情境，受試者的個別差異不是造成細格間變異的來源，故研究對象採便利取樣。

方 法

一、受試者

團測對象來自四個不同縣市的七所小學，每校各選一個六年級班級，共計211名學生。因部分學生正確率低於25%，且漏答數達50%，或答案遠低於可見的立方體個數（例如正確答案18，卻回答3個），視爲無效樣本，剔除了7名，最後有效樣本爲204人。個測以桃園縣兩所國小的六年級班級爲對象，兩校各有五個班級，先由級任老師排除兩三名能力過低之學生，再挑選平日勇於表達、喜歡發表，但成績不限的學生10名，繕寫名單後，由研究者隨機抽取4名學生，共計40名。這群學生與立方體計數相關的課程學習經驗，與前導性研究的受試者相同。

二、研究材料與實驗設計

研究材料分爲高規律與低規律兩類試題，前者指最少可被劃分爲3個長方體組塊的堆疊組合，而後者則至少5個或以上。圖1、2爲低規律，圖3、4爲高規律。

低規律試題操弄兩個自變項，一是隱藏的立方體個數，包含四個水準，4、5、6、7個隱藏個數；另一是隱藏立方體分佈的零散程度，含兩個水準，二向度類型是指試題中的立方體堆疊有 Y、Z 兩個方向被遮蔽，例如圖1；三向度類型則指所隱藏的立方體包含了 X、Y、Z 三個向度，例如圖2。兩個自變項交叉成八個細格，每一細格各兩題，合計16題。各題的立方體總數都控制在15至19之間，且堆疊在4×4×4的空間範圍內。由於一向度的類型無法在4×4×4的空間範圍內設計隱藏數4至7的題型，故本研究排除一向度的類型。

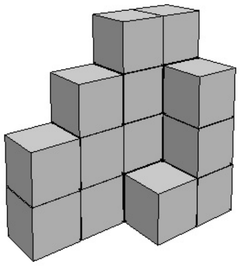


圖1 「二向度」之立方體堆疊圖例

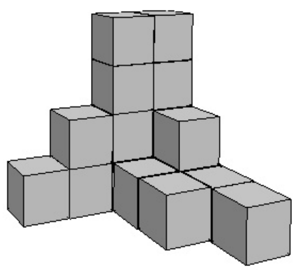


圖2 「三向度」之立方體堆疊圖例

高規律試題則操弄一個自變項—外形的完整程度，分兩個水準，外形完整類型意指物件顯現於外的立方體配置可視爲由數個完整的組塊所組合，其隱藏部分的立方體不會影響外形的完整性，例

如圖3。而外形不完整類型則其隱藏的立方體會影響外形的完整性，例如圖4。兩種類型各設計兩個題目，共計4題。高規律試題的立方體總數皆控制為20個，但圖形設計上無法平衡隱藏個數，故外形完整的類型其隱藏個數皆為5個，而外形不完整類型的隱藏個數為6個。立方體堆疊的範圍同樣控制在4×4×4。

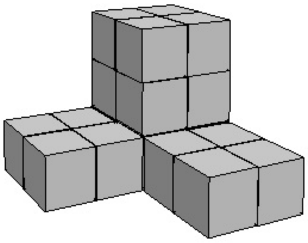


圖3 「外形完整」之立方體堆疊圖例

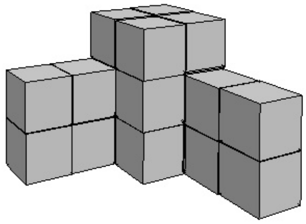


圖4 「外形不完整」之立方體堆疊圖例

設計好的試題以電腦3D 繪圖軟體「六角大王」製作標準立方體原型，並重複複製原型以產生堆疊之立體物件，接著調整圖形的角度使正面的比例大於側面，以呈現最佳的視角，增加圖形的立體感。

團測材料將前述20題以紙本呈現（見附錄1）。每張圖大小為4×4 cm^2，以縱行5張、橫列2張圖的方式印製在 A4的紙上，共兩頁，前面另附一頁的指導語。個測則將20題平均分配成結構相同的 A、B 兩試卷，每一試卷皆包含低規律題的八個細格及高規律題的兩個細格，每一細格內的試題一題。試題結構與配置詳見後文的表1和2，A、B 卷的目的僅在增加試題取樣，不是重要的自變項。

三、施測程序

團測以班級為單位，主試者為該班導師，於2006年1月中旬進行。施測前以前導性研究類似的指導語說明，若有學生提出問題，皆以『你可以再想想看』回應，不給予任何指導。

個別施測由第一作者擔任施測者，在2006年5月9日至5月26日進行。兩校各有一半的受試者使用 A 卷，另一半受試者接受 B 卷。在第一階段正式施測前先進行一題練習題（試卷來自未施測的另一試卷 B 或 A），以確認學生能正確理解作業要求，接著以隨機的順序呈現正式試題，一次只呈現一個題目，施測者逐題紀錄解題時間。每解完一題，即展示5點量表的難度說明卡，請學生依據圖卡上的「非常簡單」、「簡單」、「普通」、「困難」及「非常困難」，給予該試題難易度1-5不等的分數，分數愈高代表學生主觀認為該題愈困難。依上述程序逐一完成10項試題，一般可在20分鐘內完成。同一群受試者約在10天之後進行第二階段的個測，同樣題本的空白試卷以隨機順序逐題呈現，學生在紙本上作答一題後隨即由施測者進一步訪談其計數歷程，並請學生一面解說其解題步驟，一面在題本空白處記下任何可以呈現出計數思維的記號。學生可能列出計算過程，標示出挪動、計數立方體的箭頭與序號，或是圈出共同處理的立方體組塊等。重複上述步驟逐一完成各題，通常可在30分鐘內完成。訪談過程全程錄音。

結果與討論

本研究有正確率、解題時間、主觀難度等三類依變項，且正確率又包括了團測、個測第一階段、個測第二階段三組資料，在檢驗研究假設之前，我們以表1和表2的對照來討論應該如何解讀不同依

變項的意義。

表1和2顯示，團測和第一階段的平均正確率非常相近，比較各題的正確率，其趨勢也大致相當。顯示進行正確率分析時，兩個正確率的推論統計資料應該可以相互比較，同時，從個測第一階段所收集到的解題時間與難度評估，也大致可以用來推估團体資料趨勢。表2呈現的高規律題正確率均高達九成以上，此時所操弄的自變項效果若不顯著，有可能是因天花板效應。

但是，第二階段個測的正確率明顯較第一階段高，F（1, 38）＝ 15.10，MSE = 1.13，p＜ .001，其原因有二：第二階段的解題是個測學生解決同樣試題的第二次機會，可能有練習效果；且第二階段是每解完一題，就需要報告該題的解題歷程，可能因此增加受測學生的自我監控，而提升後續各題的表現。所以，分析正確率資料時，不採用第二階段的資料。同時，此一結果顯示，從第二階段所收集到的解題歷程，雖然可以提供我們瞭解學生立方體計數作業上的策略，但有高估其品質之虞，亦即學生原始的解題策略，可能略遜於本研究所描述的狀態。

表1　低規律試題的結構與正確率（%）

向度	隱藏個數	總個數	團測試卷題號	團測（%）	第一階段（%）	第二階段（%）
二	4	17	6	93	85	100
		15	11	95	90	100
	5	16	13	79	85	100
		16	10	85	95	85
	6	18	3	80	80	95
		16	17	92	90	95
	7	19	20	88	80	95
		19	2	86	100	90
三	4	17	19	77	75	90
		15	9	81	75	85
	5	16	4	90	90	100
		16	1	71	55	80
	6	18	7	72	60	90
		16	18	72	75	75
	7	19	16	82	85	100
		19	15	73	60	85
平均				82	80	92

表2　高規律試題的結構與正確率（%）

外形	隱藏個數	總個數	團測試卷題號	團測（%）	第一階段（%）	第二階段（%）
完整	5	20	8	92	100	100
		20	14	93	90	100
不完整	6	20	12	93	95	100
		20	5	93	90	90
平均				93	94	98

此外，團測中每位受試者在同一細格內會有兩題試題，目的如研究材料一節所言，是在增加試題取樣的廣度。從表1和2可發現，同一細格的兩題之正確率多數相近，但也有少數細格差異較大，例如三向度—隱藏個數5的兩題，在團測與第一階段正確率都有很大的差異，這代表如果有部分資料違反整體趨勢，則應考慮試題取樣可能造成的變異性。

一、高、低規律題表現的比較

為瞭解立方體堆疊的規律性高低對計數的影響，故合併各細格使每名受試者在團測正確率、第一階段個測正確率、解題時間，與主觀難度上，均各有一個低規律的平均數與一個高規律的平均數。以高低規律性對各依變項分別進行受試者內變異數分析。結果204名團測學生在高規律題正確率（.93）顯著高於低規律題（.82），$F(1, 203) = 66.08$，$MSE = .02$，$p < .001$，40名個測學生的第一階段正確率也是高規律（.94）比低規律（.80）顯著高，$F(1, 39) = 16.05$，$MSE = .02$，$p < .001$。兩個正確率資料也顯示，六年級學生在高規律題的正確率都非常高。反應時間上，高規律題（12.34秒）顯著較低規律題（16.17秒）來得短，$F(1, 39) = 10.97$，$MSE = 26.71$，$p < .001$，主觀難度也是高規律（1.89）比低規律的（2.24）低，$F(1, 39) = 17.41$，$MSE = .14$，$p < .001$，且二者難度評定在「簡單」(2）附近。顯示立方體堆疊的規律性越高，其正確率越高、反應時間越快，且主觀難度越低，支持研究假設一。

二、向度與隱藏個數對低規律題表現的影響

（一）正確率

團測正確率與個測第一階段正確率的結果如圖5和6。204名團測學生在低規律題的正確率以向度（2）× 隱藏個數（4）進行完全受試者內二因子變異數分析，結果兩個主要效果均達顯著，隱藏的立方體為二向度的平均正確率（.87）高於三向度（.77），$F(1, 203) = 46.22$，$MSE = .374$，$p < .001$，隱藏個數的多寡也會影響正確率，$F(3, 609) = 8.25$，$MSE = .20$，$p < .001$，且兩因子間交互效果達顯著，$F(3, 609) = 6.73$，$MSE = .22$，$p < .001$，故進一步考驗單純主要效果，t 檢定結果顯示在隱藏個數4、6、7的情況下，二向度的正確率均高於三向度，$t(203) = 6.09$、$t(203) = 5.53$、$t(203) = 3.70$，$p < .001$。但在隱藏個數5的情況下，兩種向度間沒有差異。相對地，在二向度的情況下，僅隱藏個數4的正確率（.94）顯著較隱藏個數5、6、7的正確率（.82、.86、.87）高，$t(203) = 5.62$、$t(203) = 4.00$、$t(203) = 3.71$，$p < .001$其餘比較未達顯著；在三向度的情況下，僅隱藏個數6正確率（.72）顯著較隱藏個數4、5、7正確率（.79、.80、.77）低，$t(203) = 3.21$，$p < 0.01$、$t(203) = 3.41$，$p < 0.001$、$t(203) = -2.14$，$p < 0.05$。

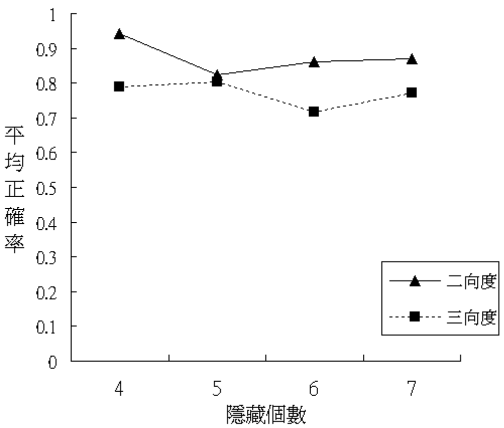


圖5　團測的正確率

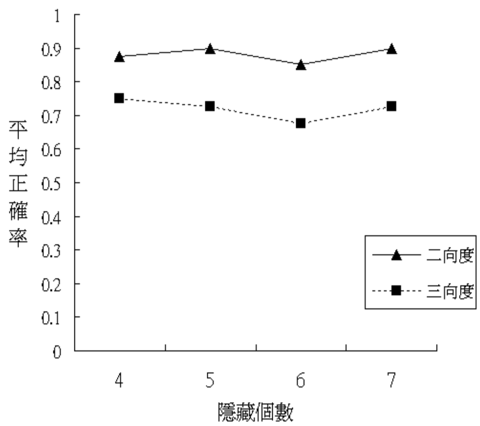


圖6　個測第一階段的正確率

個測第一階段的正確率以向度（2）×隱藏個數（4）×試卷別（2），進行三因子混合設計變異數分析，結果顯示交互作用僅向度×試卷別達顯著，$F（1, 38）=6.84$，$MSE = .15$，$p < .05$，其餘均未達顯著。因試卷別並非本研究有興趣的自變項，僅為擴大試題取樣而產生的變項，此一顯著的交互作用代表試題取樣會產生一些不穩定的效果，也恰可解釋團測正確率的交互作用，故不再探究此一交互作用的細節。三個主要效果僅向度達顯著，二向度正確率（.88）顯著高於三向度（.72），$F（1, 38）=14.27$，$MSE = .15$，$p < .001$。結果如圖6。

比較自變項在團測與個測第一階段正確率上的效果可發現，三向度穩定地比二向度試題困難，而隱藏個數的效果則不穩定，只在部分細格間有差異，其差異可能來自試題取樣，整體而言，隱藏個數對正確率的影響並不明確。

（二）解題時間

個測第一階段的解題時間，以向度（2）×隱藏個數（4）×試卷別（2）進行三因子混合設計變異數分析，結果交互作用僅隱藏個數×試卷別達顯著，$F（3, 114）=3.55$，$MSE = 80.79$，$p < .05$，其餘的交互作用均未達顯著，且試卷別的主要效果也未達顯著，因試卷別不是本研究的興趣，此一結果與正確率類似，顯示不同試題的取樣會對解題時間產生一些不穩定的影響。向度和隱藏個數的主要效果達顯著，二向度（13.99秒）的時間較三向度（18.34秒）來得短，$F（1, 38）=12.80$，$MSE = 118.60$，$p < .001$，而隱藏個數的多寡也會影響反應時間，$F（3, 114）=3.55$，$MSE = 80.79$，$p < .05$，事後比較顯示隱藏個數4的解題時間（13.34秒）明顯短於隱藏個數5、6、7（17.21、17.24、16.88秒），$t（39）=-2.54$、$t（39）=-3.50$、$t（39）=-3.27$，$p < .05$，後三者間的比較則不顯著。結果如圖7。

（三）主觀難度

個測第一階段所收集到的主觀難度分數（滿分為5）越高代表受試者主觀認為試題越困難。以向度（2）×隱藏個數（4）×試卷別（2）進行三因子混合設計變異數分析，結果僅向度的主要效果達顯著，其餘的主要效果與交互作用均未達顯著。受試者明顯認為二向度試題（平均難度值2.09）較三向度（2.38）來得簡單，$F（1, 38）=25.54$，$MSE = .26$，$p < .001$，且平均難度為「簡單」。結果如圖8。

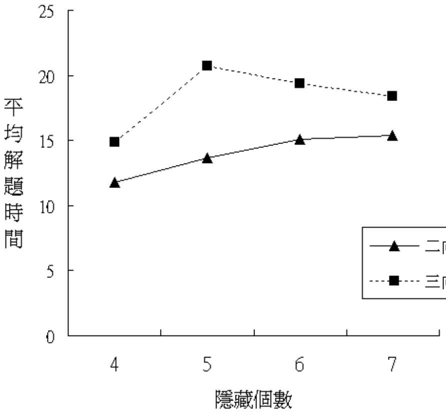


圖7　向度及隱藏個數對解題時間的影響

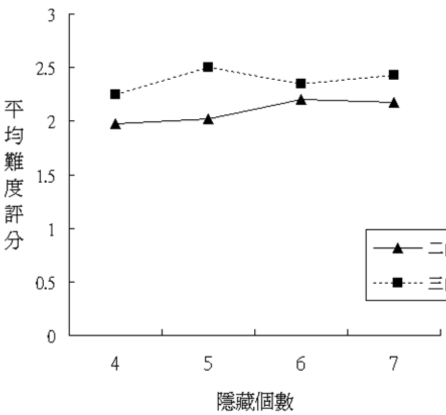


圖8　向度及隱藏個數對難度的影響

綜合上述低規律題的結果，三向度類型穩定較二向度的正確率低、反應時間長、學生主觀認為較困難。此一結果顯示隱藏的立方體向度增加，使得立方體散置的範圍擴大，會增加群組立方體的困難，若要挪移成長方體以套用公式，也需要較多的心理操弄，故學生計數的表現會較差，支持研究假設四。隱藏個數因子雖然沒有明顯影響計數的正確率及對試題難易度的評定，但會影響計數的

時間，隱藏個數4的解題時間比個數5至7的時間來得短，部分支持研究假設二。試卷別的主要效果或交互作用中有時會顯著，顯示細格內兩題的難度不盡相同，可能尚有其它未控制到的變項。

三、外形完整性對高規律題表現的影響

高規律題以外形完整性為自變項，分別就團測和第一階段正確率進行單因子受試者內變異數分析。由於各細格平均正確率均在.90以上，結果兩個考驗均未達顯著，$F(1, 203) = .02$，$MSE = .11$；$F(1, 38) = .192$，$MSE = .065$，$p > .05$。

解題時間以外形完整性（2）×試卷別（2）進行二因子混合變異數分析，結果主要效果與交互作用皆未達顯著。外形完整的平均解題時間（12.45秒）與外形不完整的（12.23秒）差不多，$F(1, 38) = .03$，$MSE = 38.07$，$p > .05$。

難度評分以外形完整性（2）×試卷別（2）進行二因子混合變異數分析，結果顯示受試者主觀認為外形完整的試題難度（1.78）顯著較外形不完整的（2.00）來得簡單，$F(1, 38) = 4.10$，$MSE = .25$，$p < .05$，此結果與研究假設三的預測方向相反。試卷別的主要效果，與兩因子的交互作用則未達顯著。

綜合上述高規律題的結果，外形完整性並不影響正確率及解題時間兩類客觀的難度指標，但會影響對試題難易度的主觀評定。雖然外形完整與否在正確率上無顯著效果可能是因天花板效應所致，但解題時間同樣無顯著差異，而其平均數約12秒，則無法以天花板效應解釋，此外，主觀評定的顯著效果與研究假設三的預測方向相反，顯示其所假設的「外形完整的堆疊方式容易忽略隱藏的部分」主張，不被支持。

四、錯誤類型分析

團測合計4080題次中，受試者計數錯誤的共有639題，佔總題次的16%。其中漏數佔錯誤試題的80%，亦即計數答案少於實際的立方體個數超過總錯誤數的3/4，其中漏數個數恰與隱藏個數相等者僅佔總錯誤的2%，即學生因完全忽視立方體堆疊中的隱藏部分而致錯誤者，在六年級受試者屬非常少數。重複計數的錯誤佔17%，即答案多於實際立方體個數的約佔1/6；未作答試題約佔3%。

個測第一階段的400題次中，受試者計數錯誤的試題共69題，佔17%，漏數、重複計數、未答者，各佔錯誤題次的72%、28%、0%。其中，只有1題是完全忽略隱藏立方體的錯誤類型，佔總錯誤數的不到1%。錯誤總比率與各類錯誤的比率與團測資料相近。個測第二階段的錯誤題數共29題，佔總題次的7%，遠低於團測與第一階段的比率，其中漏數、重複計數、未答者，分別為83%、17%、0%，其中沒有出現忽視立方體隱藏部分的錯誤類型，整體而言，各類錯誤的比率則與團測與第一階段個測相近。

上述資料顯示學生在立方體計數作業中的三種錯誤，以漏數所占比率最高，重複計數次之，未答的最少。而在漏數中，僅有極低的比例是屬於漏數個數等於隱藏個數的，顯示六年級學童中只有極少數的反應是完全無法對隱藏部分的立方體進行透視與形成心像。

五、計數策略

個測第二階段的重點在於透過對學生解題行為的觀察與訪談，特別是學生在紙本上逐步的解題過程記錄，可以瞭解學生的計數策略。本文將策略分成九種，為確定分類架構的清晰度，找了三位國小教師擔任評分員，向評分員說明過策略的分類原則後，隨機抽取五名受試者的資料，從低規律題中隨機各抽三題，合計15題，將訪談紀錄與紙本交由三位評分員與第一作者獨立分類，結果三位

評分員的分類與研究者均完全一致，亦即評分者間信度 Kappa 值爲1，顯示本研究的策略分類具有相當高的評分者間的一致性。

本研究出現的策略包括：（1）**挪補**：指解題過程中會將零散的立方體在心裡進行空間的挪移，如圖9所示，或在有空缺的地方以心理虛構的立方體填補，如圖10，以便可以把一個不完整的立方體組塊填補成較大的單位再進行運算，有時運算後還必須把虛構的立方體扣除，故本策略會伴隨其它計數策略一起出現。（2）**使用體積公式**：立體物件被切割爲長方體的組塊，並使用體積公式 L×W×H。（3）**以層爲單位**：將立體物件切割成數個水平或鉛垂的單層組塊，再以點數或面積公式 L×W 算出單層的個數後，再進行累加或乘法運算。（4）**以行/列爲單位**：立體物件被分割爲行或列，以行列爲單位計數後，再進行累加或乘法運算。（5）**點數**：以一個個立方體爲單位點數，有些學生點數的順序較爲規律，有的先點數看得見的部分，最後才點數隱藏部分的立方體，有的則隨機跳數。（6）**以外形突出部分爲單位**：將立體物件突出的部分獨立出來，使其餘的部分呈現規律的結構，此策略常見於二向度的試題，如圖11。（7）**圖形與背景**：將立體物件接近計數者的部分視爲同一個組塊，與遠離的部分分開計數，亦即將立方體劃分爲圖形與背景兩個部分，如圖12。（8）**同時使用多種單位**：將立體物件劃分成數個大小、形狀不等的組塊，分別計算每個組塊後再累加，如圖13。（9）**其它**：不在前述各類，學生選擇個人偏好的單位劃分組塊，再進行累加或乘法運算。如圖14。

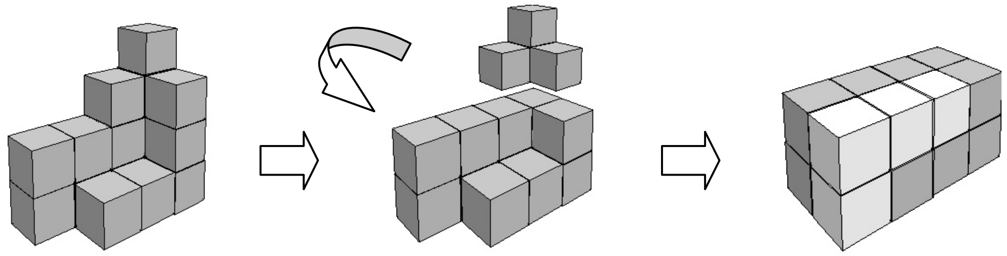


圖9　學生使用挪補策略圖例之一

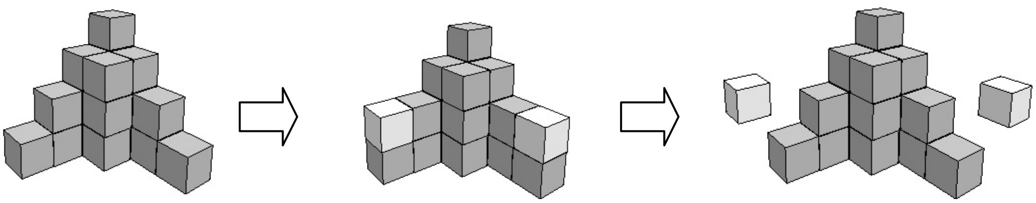


圖10　學生使用移除策略圖例之二

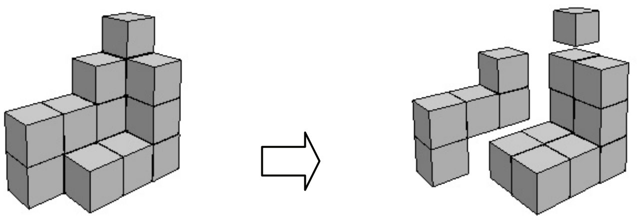


圖11　學生以立方體外形突出部分為計數單位圖例

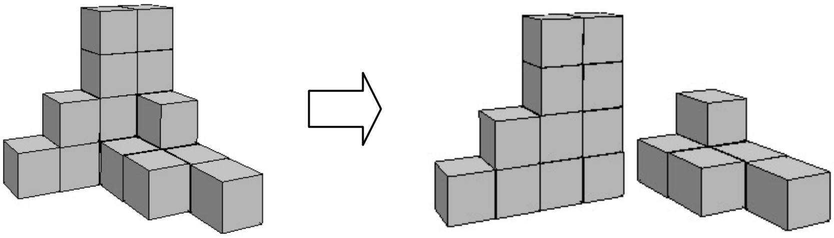


圖12　學生使用圖形與背景策略圖例

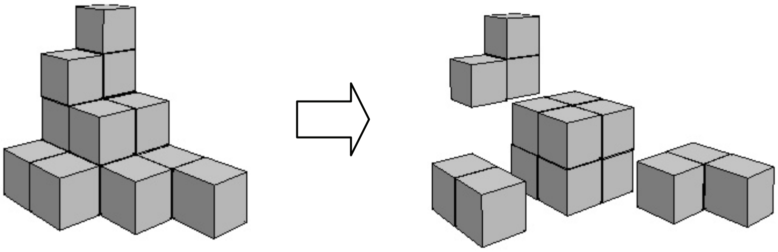


圖13 學生同時使用多種單位計數圖例

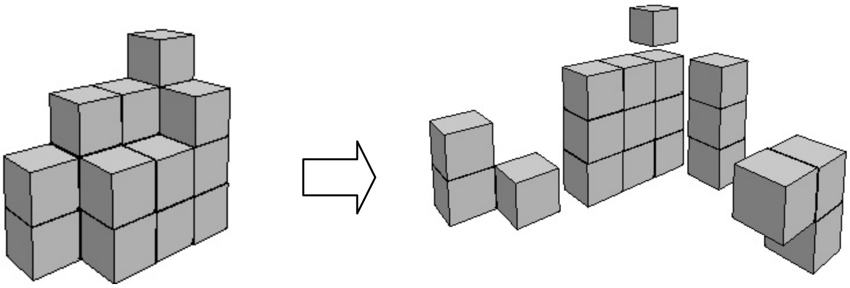


圖14　其它策略圖例

低規律題因立方體的堆疊較爲零散，因此學生會展現較多樣的計數策略，除了挪補策略實爲一種心像操弄的策略，其後都會伴隨一種計數的策略，故呈現在圖15的最左端，其餘八種計數策略合計320題次（8題／人× 40人），依其使用比率排序。有22%的低規律題使用到挪補策略，而計數策略中以點數的使用率最高，約爲23%。單用一次體積公式解題的不到1%，此一現象與低規律試題不容易形成大單位有關，但其它計數策略顯示了解題過程會或多或少地把立方體加以群組。相對地，高規律的80題次（2題／人× 40人）中，有超過八成是以層策略解題的，受試者會以合成田字的四個立方體爲單位，把立體物件群組成5個田字組塊，而很快地乘算出答案。使用率其次的是點數和多單位，但比率低至14%和9%。使用挪補策略的也僅5%。

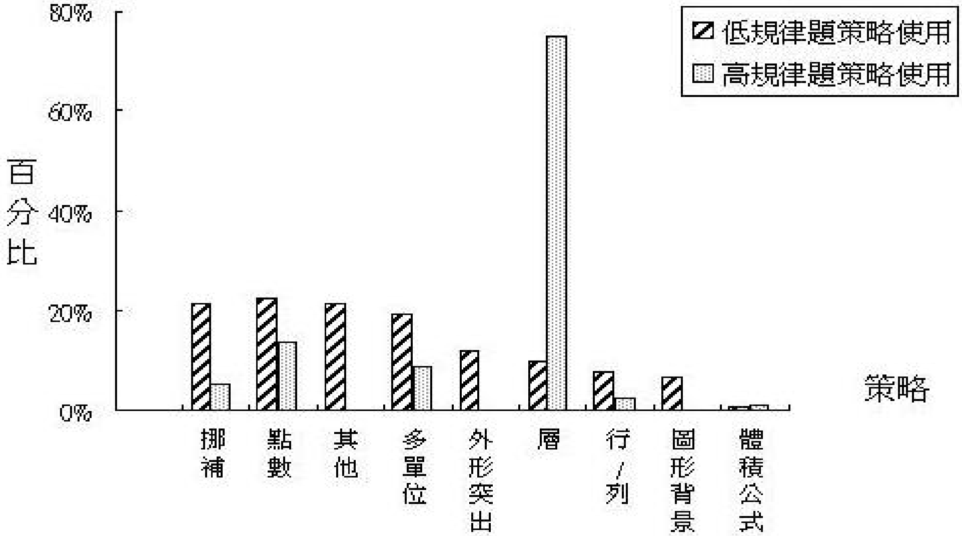


圖15　高、低規律題使用各項策略的百分比

各策略使用下的正確率，高規律題整體正確率都很高，除了點數的正確率爲.82之外，所有高規律題曾出現的策略都完全正確。低規律題也是點數的正確率最低，爲.86，其次是同時使用多種單位的策略，.89較低，其餘策略的正確率都在.93以上，包括使用了挪補的題次也都有.94的正確率。此處僅作描述統計的報導，而未做各策略正確率的推論統計，是因前文已指出第二階段的正確率明顯較第一階段與團測資料來得高，所以，不易顯現各策略間正確率的差異。

另外，以個測八題低規律試題中使用了多少不同的策略將受試者分組，各組的解題正確率如圖16，結果可以發現，使用的策略數越多的學生其平均正確率越高，顯示學生若能依據物件的結構彈性運用不同的計數策略，其正確率會較高，其中只採用一種策略解題的六個學生，都是使用一一點數的策略。

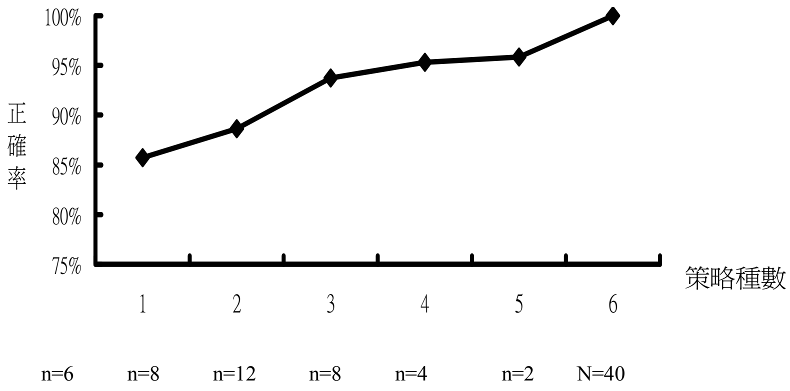


圖16　低規律題學生使用策略種數與正確率的關係

本文假設物件結構畸零的立方體計數試題會增加視覺化的需求，因爲個體會傾向於操弄心像使能組合成較大的組塊，而三向度題會比二向度題更需要視覺化的操弄，底下以三個資料強化此一假設。一是，前述策略分析的資料顯示，一一點數的正確率最低，而高規律題中田字型同一組塊的運用正確率最高，其它各種不同群組方式的使用率與正確率居中，顯示群組有助於維持心像與正確計數，而畸零的物件需要改變立方體的心理距離或進行挪移方能產生較佳的組塊。其二，我們在二向度與三向度試題中挑選出正確率最高與最低的試題各一題，逐一分析個測受試者解題時的群組數，結果在二向度與三向度類型中正確率高的試題，學生平均群組立方體組塊的個數均較少，平均二向度是5個，三向度是6個；而在正確率低的試題，學生群組的個數較多，即二向度是6個，三向度是8個，三向度試題的群組數皆高於二向度試題，說明了隱藏立方體散置得越廣則越難群組，且越少的群組數可以減輕其認知負荷而有較高的正確率。第三，使用點數策略的題數中二向度試題佔39%，三向度則佔61%，可見二向度比三向度容易劃分成比較大的單位，而減少使用一一點數的策略。

此外，從訪談中得知，六年級學生已明確掌握物體重力的概念，知道物體不可能憑空懸浮，因此學生作答時並沒有如預期中因爲立方體外顯部分的完整性而忽略了下方所隱藏的部分，這可以解釋研究假設三未獲支持的原因。舉例如下：

015主試：請你說說看這一題（附錄第4題）是怎麼算的？你也可以在空白處做紀錄。（學生在測驗紙上寫下3+8+2+3＝16）

016生08：上面有3個，中間和下面有8個，左邊有2個，前面有3個（手指隨著所說的地方移動）。

017主試：你可以再說清楚一點，算式中的8個是怎麼數的嗎？

018生08：就是中間這層有4個，下面還有隱藏一層一樣的4個，總共有8個。

019主試：你怎麼知道下面還有4個？

020生08：下面沒有東西，上面的就會倒啊，所以一定是下面還有積木，上面才可以堆得起來嘛！

結論與建議

立方體計數作業以往的實徵研究多以堆疊成長方體的2D 圖形爲試題，研究者也多半從空間定位的觀點界定其所涉及的認知歷程。Ben-Haim 等人（1985）認爲學生主要的困難來自能否理解2D 所表徵的3D 圖形，並以3D 的單位作爲點數的對象，以及能否考慮到隱藏著的立方體，這樣的認知歷程一部份涉及圖示表徵的理解問題；另一部份則牽涉到能否理解物件各成分在空間上的相對關係，並適當地建構出心像，這一般在空間能力中是被歸爲空間定位。Battista 和 Clements（Battista, 1999; Battista & Clements, 1996, 1998）一系列的研究則指出，空間結構化的歷程是如何地透過協調與整合不同視點的訊息，而能在心裡產生一個立體物件的心像，且此一心像可以被儲存起來成爲未來被特定刺激活化的心智模型，而建構心像的心智操弄歷程也會成爲一種基模，當環境中的刺激無法找到對應的心智模型時，得以依循一定的整合與轉化的操作而產生新的心理物件。整體而言，Battista 和 Clements 所探討的立方體計數歷程仍是屬於空間定位。本文作者也認同外在表徵的閱讀理解（看懂用2D 所表示的3D 圖形）和形成立體物件的心像，是完成立方體計數的基本能力。

然而在心理測驗與數學教材中，立方體計數作業的試題不僅只是規則堆疊成長方體的型態，亦常見各種規則性不一的堆疊方式。而我國學生在五年級與之前的數學課程就完成了認識視圖、透視圖、長方體體積等概念。那麼，六年級學生在解決不同型態的立方體計數作業時運用了什麼樣的認知能力？當我們更瞭解這類作業的認知歷程時，就更能確定這類測驗所測量的能力之特性，也更能判斷數學課程中安排這類的活動是否有價值？以及發展的是何種能力？

本研究發現對六年級學生而言，高規律題較低規律題來得正確率高、解題時間短、主觀難度低，

且高規律題的正確率超過.90以上，難度評定落在「簡單」（符合假設一）。低規律題的正確率約.80，兩個操弄變項中，隱藏立方體散布的軸度穩定地發現二向度題比三向度題來得正確率高、時間短、主觀難度低（符合假設四），而隱藏個數的效果不明顯，僅在團測正確率與個測的解題時間上，顯現隱藏個數越少可能會有較高的正確率與較短之解題時間的趨勢（部分支持假設二）。至於高規律題中操弄外形的完整性，發現完整與否並不影響正確率與解題時間，但學生主觀覺得外形完整的試題比較簡單（不支持假設三）。此外，錯誤類型與計數策略的分析也可作為討論認知歷程的佐證。

有關高規律題表現優於低規律題的假設一獲得支持，顯示對六年級學生而言，立方體計數的困難不在理解圖形表徵，或協調柱體邊緣的平面成為立方體的問題。首先，如果理解2D 所表徵的3D圖形是主要困難的話，那麼高低規律題應該一樣困難。其次，如果協調柱體邊緣不同平面來表徵同一立方體是主要困難的話，那麼高低規律題也應該一樣困難。第三，如果建構內部隱藏立方體的心像是主要困難的話，高規律題可能因外部顯現的可見立方體與隱藏立方體間的關係較為規則，而會較容易形成心像。第四，如果組合立方體成為適當的計數單位，使得切割後的心像可以活化特定心智模型，使心像穩定，且單位數較少而易於計數是主要的認知負荷的話，高規律題容易切割成同一單位（例如田字型的單位），而低規律題切割後的單位不一，或需要進一步挪移方能有較佳的組合，因此高規律題會表現得比低規律題好。所以，高規律題表現優於低規律題指出，形成穩定心像之定位能力或視覺化等操弄能力是影響六年級學生計數表現的可能因素。

研究假設二和三，分別在低規律題中操弄隱藏個數，與在高規律題中操弄外形的完整性，結果顯示對隱藏立方體形成穩定心像的定位能力並非重要的影響因素。如果此種定位能力為重要因素，那麼在控制其它條件後，隱藏個數越多的試題難度應該越高，但此一結果僅出現在團測正確率的部分資料與個測反應時間上。另外，如果此一定位能力是重要因素，那麼物件不完整的外形配置會成為隱藏著某些立方體的提示線索，而比較不會忽略隱藏的部分，但結果顯示外形不論完整與否，學生的表現都一樣好，而且訪談的資料顯示，六年級學生對於重力概念的掌握使他們瞭解物體不會憑空懸浮，故至少在隱藏個數7（含）以內的情況下，六年級學生是可以很自然地對隱藏部分的立方體產生心像的。

那麼，什麼原因使得學生對隱藏部分的立方體有形成心像的能力卻無法正確計數呢？從點數策略有最低的正確率看來，如果個體不將心中所形成的物件加以群組，則在點數的同時要維持住心像，又要記得某一立方體是否數過，可能會超過其工作記憶的負荷而犯錯。所以當受試者對2D 圖形形成初步的3D 表徵之後，可以決定要不要透過視覺化將立方體加以群組，並決定群組成什麼樣的組塊。如果群組為組塊，則學生可以在紙上圈出組塊，並記錄個數來減低工作記憶的負擔，即使不採用外在表徵，工作記憶也比較能處理被群組後的單位。此外，除了點數之外，其餘七種計數策略都顯示個體會採用各種群組方式，同時挪補策略也顯示個體傾向挪移畸零的立方體使能與其它立方體組合成大單位。而且，圖16也顯示正確率與群組個數間呈反比關係。Woodman, Vecera 和 Luck（2003）指出群組在視覺工作記憶上的效果，他們發現空間的接近性原則會提高圖形比對的正確率，顯示被群組的視覺工作記憶能被保留得比較好。

有關隱藏立方體分佈於二向度的試題表現優於三向度的研究假設四，也同樣指出影響六年級立方體計數表現的主要是空間視覺化能力。在控制立方體總數與隱藏個數的情況下，隱藏立方體分散在三向度則立體物件就顯得比二向度的物件來得畸零，其結果是不容易被群組為較大的組塊以減低工作記憶的負荷，也不容易採用相同單位來方便計數，如果想要群組為較大組塊，則個體必須挪移零散的立方體，這些透過改變心理距離以產生適當群組與挪移立方體之心像的能力，均與視覺化的空間能力有關。而學生的解題策略也顯示，他們在高規律題中採用單一的群組單位（四個排成田字形的立方體組塊）比率很高，且能完全正確計數，而不太需要進行挪補。而低規律題中則有1/5的題

目出現挪移的心像操弄策略，而計數過程中一一點數的比率雖然也佔1/4，但所有試題都只採用此點數策略的學生，在40名受試者中僅有6名，且其正確率是各種策略中最低者，顯示多數的受試者會或多或少地使用或大或小的組塊作爲計數的單位。

綜合上述的討論，我們同意要能完成紙本呈現的立方體計數作業，必須如同 Ben-Haim 等人（1985）與 Battista 和 Clements（1996, 1998）所言，先得具備看懂2D 紙本上所呈現3D 圖形的表徵理解能力，也要能協調與統整正方形的面和立方體單位間的關係，對隱藏部分的立方體產生心像的定位能力。但對於學過視圖、透視圖，也操作過立方體積木堆疊出各種長方形體積的六年級學生而言，真正影響不規則立方體計數作業表現的是視覺化能力，群組與挪移心像的視覺化能力，是學生能否正確減低工作記憶的負荷，而正確計數的關鍵。

因此，中學生或成人空間能力測驗中的不規則立方體計數作業，測量的並非靜態的、形成心像的空間定位能力，而是動態的、操弄的視覺化能力，故在測驗分數解釋與用來甄選人才時，必須恰當地考量此一作業所涉及的認知歷程。同樣地，六年級之後的數學課程提供這類計數作業的價值，是在於促進學生心像操弄的視覺化能力，並發展彈性調整群組策略的能力，多多經驗這類作業能使學生體認到採用一一點數之策略的不足，進而能在初步形成3D 心像時，多運用群組或挪補的策略以減低視覺工作記憶的負荷，進而發展視覺化能力。

參 考 文 獻

陸偉明（民88）：空間能力測量之效度分析。*中國測驗學會測驗年刊*，46卷，2期，101- 111頁。

教育部（民82）：*國民小學八十二年版課程綱要*。台北市：教育部。

教育部（民92）：*九年一貫數學學習領域課程綱要*。台北市：教育部。

蔣家唐（民83）：*視覺空間認知能力向度分析*。國立彰化師範大學主辦「第一屆特殊教育課程與教學論文發表會」宣讀之論文（彰化）。

蔣家唐（民84）：*視覺空間認知能力向度分析暨數理-語文資優生視覺空間認知能力差異研究*。行政院國家科學委員會專題研究計劃成果報告，NSC84-2511-S-018-003。

Battista, M. T. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays: Conceptual progress in an inquiry-based classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(4), 417-448.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Student's understanding of three- dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 258-292.

Battista, M. T., & Clements, D. H. (1998). Finding the number of cubes in rectangular cube building. *Teaching Children Mathematics, 4*(5), 258-264.

Ben-Haim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting student's performance. *Educational Studies in Mathematics, 16*(4), 389-409.

Brown, D. L., & Wheatley, G. H. (1989). Relationship between spatial knowledge and mathematics knowledge. In C. A. Maher, G. A. Goldin, & R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of the eleventh annual meeting, North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 143-148). New Brunswick, NJ: Rutgers University.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). NY: Macmillan.

Eliot, J. (1980). Classification of figural spatial tests. *Perceptual & Motor Skills, 51*(1), 847-851.

Linn, M. C., & Peterson, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, *56*(6), 1479-1498.

McGee, M. C. (1979). Human spatial ability: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influence. *Psychological Bulletin, 86*(5), 889-918.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

O'Driscoll-Tole, K., (1998). *Identifying spatial skills that underpin the 5-14 Mathematics Curriculum in Scotland*. Paper presented at the 1998 conference of the Scottish Educational Research Association, the University of Dundee, UK: Dundee.

Olkun, S., & Knaupp, J. E. (2000). *Children's understanding of rectangular solids made of small cubes*. Paper presented at the 1999 annual meeting of Southwest Educational Research Association, San Antonio.

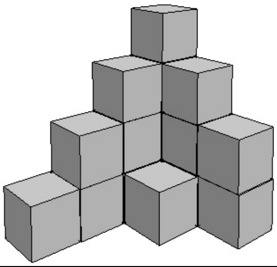
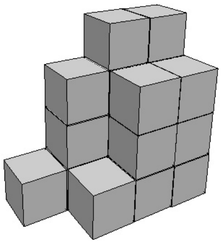
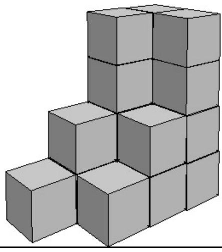
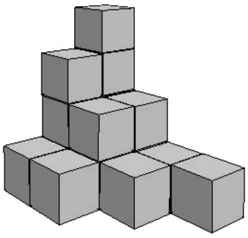
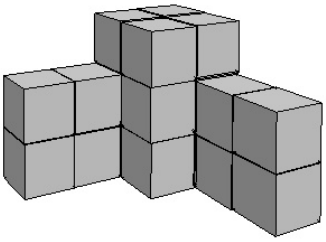
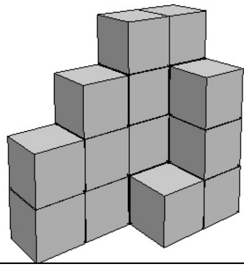
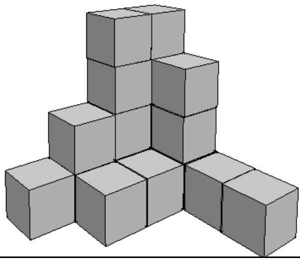
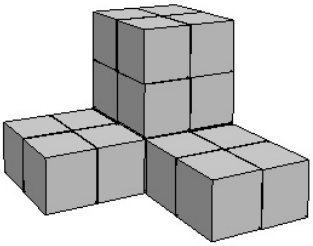
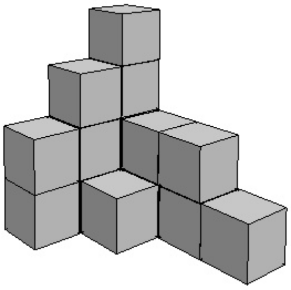
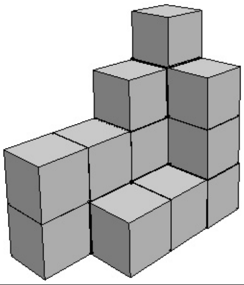
Reio, T. G., Czamolewski, M., & Eliot, J. (2004). Handedness and spatial ability: Differential patterns of relationships. *Laterality, 9*(3), 339-358.

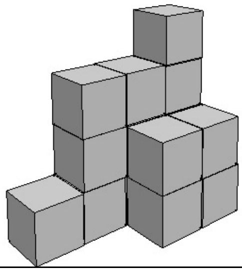
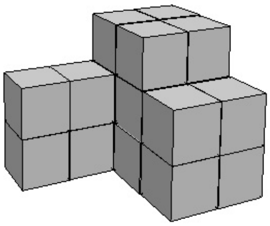
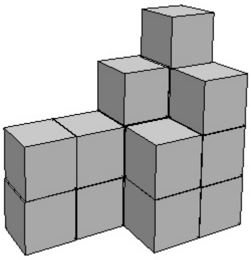
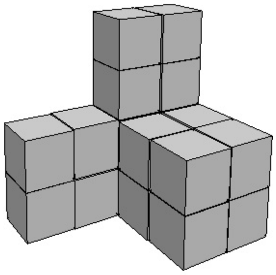
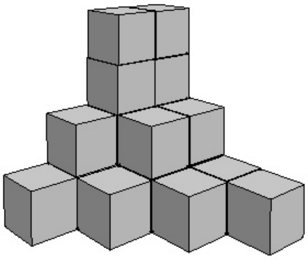
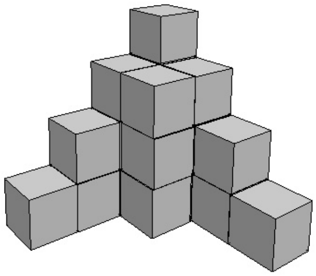
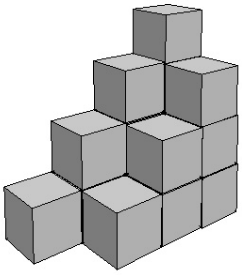
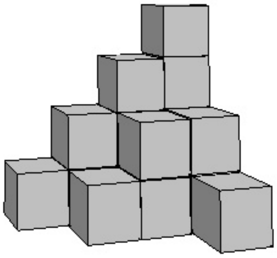
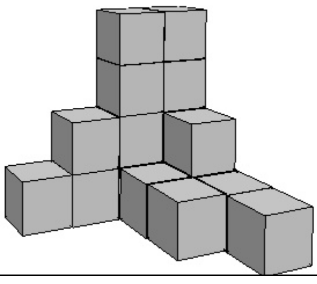
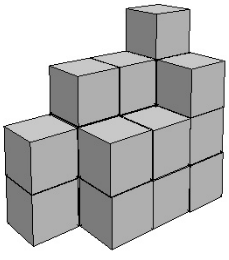
Shea, D. L., Lubinski, D., & Benbow, C. P. (2001). Importance of assessing spatial ability in intellectually talented young adolescents: A 20-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology, 93*(3), 604-614.

Woodman, G. F., Vecera, S. P., & Luck, S. J. (2003). Perceptual organization influences visual working memory. *Psychonomic Bulletin & Review, 10*(1), 80-87.

收 稿 日 期：2008 年 07 月 17 日
一稿修訂日期：2008 年 12 月 11 日
接受刊登日期：2008 年 12 月 12 日

附錄　正式實驗的立方體計數作業試題

1. 共有（　　　　　　）個立方體 	2. 共有（　　　　　　）個立方體 
3. 共有（　　　　　　）個立方體 	4. 共有（　　　　　　）個立方體 
5. 共有（　　　　　　）個立方體 	6. 共有（　　　　　　）個立方體 
7. 共有（　　　　　　）個立方體 	8. 共有（　　　　　　）個立方體 
9. 共有（　　　　　　）個立方體 	10. 共有（　　　　　　）個立方體 

11. 共有（　　　　　　）個立方體 	12. 共有（　　　　　　）個立方體 
13. 共有（　　　　　　）個立方體 	14. 共有（　　　　　　）個立方體 
15. 共有（　　　　　　）個立方體 	16. 共有（　　　　　　）個立方體 
17. 共有（　　　　　　）個立方體 	18. 共有（　　　　　　）個立方體 
19. 共有（　　　　　　）個立方體 	20. 共有（　　　　　　）個立方體 

Bulletin of Educational Psychology, 2009, 41(1), 125-146
National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, R.O.C.

Exploring the Factors That Influence Sixth Graders' Cubic Enumeration: The Roles of Spatial Orientation and Visualization

Pi-Chih Chang
Teacher of
Sanding Elementary School
in Taoyuan

Chao-Jung Wu
Department of Educational Psychology
and Counseling
National Taiwan Normal University

The task of enumerating the number of 3-D cube arrays is used to evaluate and develop student's spatial ability. This research investigates the roles of spatial orientation and visualization of sixth graders in cube enumeration. The material included two types of cube arrays – low regularity and high regularity. We tested two independent variables in low regularity arrays – number and distribution of hidden cubes. The former had four levels (i.e., 4, 5, 6, or 7) of hidden cubes. The latter were divided into two axes and three axes according to the degrees of the hidden cubes. High regularity arrays were divided into outside intact and non-intact types depending on whether the appearance is integral or not. Paper-and-pencil questionnaire was group-administered to collect the hit rate of 204 students. Individual interviews were also conducted to gather data on hit rate, response time, difficulty rating, and strategies from 40 students. Results showed that high regularity arrays yielded better performance than low regularity arrays, and two axes condition yielded better performance than three axes condition. The effects of the number of hidden cubes are not as steady. There are no significantly differences in hit rate and response time between the intact and non-intact groups. Current literature (Battista et al., 1996, 1998, & 1999; Ben-Chaim et al., 1985) has claimed that students' difficulty in cubes enumeration is due to deficiencies of mental imagery or orthogonal coordination. However, we argue that visualization is more influential than spatial orientation.

KEY WORDS: chunking, cube enumeration, spatial ability, spatial orientation, spatial visualization