國立台灣師範大學教育心理與輔導學系
教育心理學報，民83，27期，175～200頁

數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究

張 景 媛

本研究主要目的是以質的研究方法探討學生在數學文字題上所產生的錯誤概念，並探究學生如何建構出正確的數學概念。受試爲國中二年級55名學生。此項研究採用放聲思考和問題思考法來分析學生解答數學文字題時在語言知識、基模知識、策略知識、及程序性知識等四方面的錯誤概念。研究者並以引導思考教學策略來瞭解學生如何建構出正確的數學概念。

關鍵字：數學文字題、錯誤概念、語言知識、基模知識、策略知識、程序性知識、放聲思考。

Vergnaud et al.（1990）曾指出傳統上數學知識論（epistemology of mathematics）是由幾方面所組成：有些是數學家本身的一種自然反應，有些是各學派間，如直覺主義、建構主義、邏輯學家之間的辯論形成數學知識論的領域。數學教育的知識論（epistemology of mathematics education）則包含有數學及心理學兩個領域的知識，因爲數學教育是以不同的目標在社會上不同的年級、班級中進行。數學教育可從過去的數學教學所發現的問題，幫助我們瞭解今日學生易犯的錯誤；而數學教育心理學則是研究知識與錯誤概念之間的關係。

概念學習對學生來說是相當困難的。Glaeser（引自Vergnaud, et al., 1990）曾發表一篇歷史研究報告，他指出即使早期著名的數學家們都無法對負數（negative number）的性質下一個定義，不能接受零以下還有數的觀念，我們又怎麼能夠要求學生輕易的瞭解負數的意義呢？由於數學教師與學生在數學認知上有差異存在，教師很少懷疑自己在數學知識上及數學教學上的能力，反而認爲學生是不認眞學習，而忽視學生在數學學習時認知上的困難。

一、數學文字題相關問題研究

數學文字題的特點是用語言文字在敘述數學問題。一般人認爲學生具有語文能力，因此對於簡單情境的數學文字題的描述，必定能夠理解其意，然後加以運算。目前，數學教學研究中發現數學教學時常要用到各種方式的語言活動，如聽、說、讀、寫等。在數學學習上，語言可能是形成學生瞭解數學的障礙。Vergnaud et al.（1990）表示人們的心理表徵（signified, the mental representation）和外在表徵（signifier, the external representation）是不可分的。也就是說，人們外在不同的語言表達方式都和其內在的心理表徵有關。這種相互

依存的關係表現在兩方面：一是個人對於內容或公式的瞭解需要依賴其在這方面的特殊知識；一是經由語言活動，引導個體從不同的角度去思考問題，使有助於問題的解決。因此，數學教學研究者注意到下列問題：

1. 數學和數學教學中所使用的語言特色是什麼？

2. 學生在讀寫數學時，會遭遇到那些是由於數學語言的特質所產生的問題（特別是從一種形式的語言轉換到另一種形式時）？

3. 語言理解在問題解決時扮演何種角色？也就是說，問題的陳述如何影響學生的解題？

4. 語言溝通在數學學習上扮演何種角色？

5. 如何教才能直接教導學生發展數學閱讀能力或理解能力？

對於這些問題數學教育學者不斷的思考與研究，希望提出較為具體有效的結果，以便對於學生的數學學習有較大的助益。Hafner（1993）的研究指出美國學生的數學成就低於其他國家，其原因是美國的數學教學較不重視數學的閱讀。此外，教師的教學理念與教學態度亦會造成影響。Carpenter, Fennema, & Franke（1992）指出數學教師應該利用學生的數學思考來從事教學。他們在一連串認知導向的教學研究中使學生學到超乎想像的數學概念。因此，瞭解學生在想什麼，善加利用這些資訊將能增加學生數學學習的效果。Carpenter et al.（1989）也曾研究數學學習的效果，發現運用學生數學思考的知識來教學，會增進學生的解題策略，而教師也愈來愈能瞭解學生學習上的困難及學生個別差異的情形。這對教師和學生來說都有很大的幫助。因為教師瞭解學生的能力就能思考適當的教學策略，增加教學的信心；而學生因為教師態度的轉變，也能以較自在的方式來學習數學。

Muth（1991）的研究指出：學生對於數學文字題的解題能力會因文字題中無關訊息的干擾而無法解決問題。學生們的觀念中都認為文字題中的所有訊息都應被使用，因而造成學生問題整合上的困難。Low & Over（1993）的研究指出，女生比男生更容易受無關訊息影響。此外，亦有學者（Davis-Dorsey, Ross, & Morrison, 1991）指出學生在解數學文字題時，應將問題的字句重述，以形成自己生活經驗中的事情。對於同類型的題目，還可加上一些關鍵字，將問題轉變成為自己所熟悉的程序來解題。這種程序可能會與原先的文字題上的順序不同，但卻有助於個人的解題策略。因此，問題個人化的方式較能引起學生的學習動機，持續注意力於問題情境中，問題個人化就是將文字題中的關鍵處與個人生活中熟悉的編碼相連，以喚起舊有的基模知識來產生策略並解決問題。

二、學生錯誤概念的研究

過去有關教與學的研究中，教師常認為學生答錯是因不小心或誤解題意。但是今日教學心理學（instructional psychology）的研究指出學生在學習時會主動建構所學習的材料，也會在建構的過程中產生錯誤概念（misconception）。Pines（1980）說明人類概念的形成正如一個圓錐形的結構，底部是延伸的部分，包含某一概念的許多小的事例；而圓錐形的頂部則是一種內涵，即所謂概念的特質。在學習時，由底部的事例推到上端（bottom-up），這是概念化歷程；由上端的概念推到底部（top-down），則是所謂的應用。由下往上的概念化過程中有可能獲得不正確的內涵，再由上往下將不正確的內涵應用出來時，就會產生錯誤。

呂溪木（民72）認為學生錯誤概念的產生有可能是來自學生日常生活經驗中所學得的，也有些是來自於學生對老師機械式教學的一知半解。所以，目前的教學研究強調的不只是教師如何教才能達到良好的教學效果，還要注意教師是如何瞭解學生的錯誤概念，及如何使用策略來修正學生經驗中已有的錯誤概念。

Royer, Cisero & Carlo（1993）認爲教學中認知的評估要著重在學生認知技能發展的程度上，也就是說認知的評估是要提供學習診斷的資訊，學生的學習表現不只顯示出教學事件的成功或失敗，它主要是提供訊息以幫助教學者決定當學習失敗時應如何處理。在學生的認知技能發展中，有一項很重要的技能是偵錯，當學生在某種情境中產生了某種錯誤概念時，他在其他類似的情境中也會產生這種錯誤概念。因此，評估學生認知學習的困難問題時，應多加注意學生認知技能發展的程度。目前，「放聲思考」（thinking aloud）的方法是將蒐集到的資料做原案分析（protocol analysis）。這對於小規模的研究是可以接受的，但對於數量多的研究來說是不適用的，因爲要蒐集、記錄、分析原案是非常繁雜精細的工作。因此，許多研究者採用的是質與量並重的研究方法，來探討學生認知學習的效果。本研究者認爲此種方式應該是頗爲可行的一種研究方法。

三、國中生數學文字題錯誤概念的分析

國中階段的數學課程是國中生較感困擾的一門科目。因爲國中數學和國小數學間有其明顯的差異存在。國小數學依皮亞傑的認知發展來看，著重在具體操作的教學，而國中數學卻以形式運思期的抽象思考和邏輯推理爲主，在教材和教法上都有明顯的不同。學生以其熟悉的數學學習方式改變成不熟悉的思考方式，這種思考的過程當中又會引發許多的錯誤概念。在國中的數學學習中，除運算式的學習外，數學文字題的學習對學生而言更是一大挑戰。

數學文字題涉及的不只是計算的能力，它還涉及到學生的概念理解能力。不論是計算能力或概念理解能力，學生都會產生一些錯誤。在計算能力方面，學生通常會犯下有系統性的錯誤，這種錯誤除了不小心造成的之外，也有可能是錯誤概念與技能造出的。教師可透過錯誤概念的分析，瞭解學生的錯誤類型究竟是由何種錯誤概念產生，進而給予學生實施補救教學，修正他們錯誤的運算技能。以數學文字題而言，概念理解涉及很複雜的認知歷程，包含「語文數學」以及「形式數學」，也就是指學生對概念理解的程度會影響其對問題的分析，及其所擬採用的解題策略和有關經驗的回憶等（張新仁，民78）。

過去有關數學文字題錯誤概念的分析大多是探討國小數學的問題。例如，Brown & Burton（1978）研究學生對於減法的錯誤概念，發現有些錯誤概念有時會獲得正確答案，有時才導致錯誤的結果。Carpenter & Moser（1983）研究加法和減法，指出有四種類型：改變（chang）、合併（combine）、比較（compare）、以及等同（equalize）。學生對這四種題型的學習有不同的學習效果。這四種敘述句的語言陳述方式會影響到學生解題的技巧，題目若以較理論性或抽象性的方式來敘述，就會引起較多的問題表徵的錯誤（problem-representation errors）。Hinsley, Hayes & Simon（1977）是少數研究國中數學的學者。他們自代數課本選出76道代數題目，請一群受試依題目類型加以分類。他們指出學生形成代數錯誤觀念的原因如下：使用不當的基模（using inappropriate schemata）、做了錯誤的估計（making faulty estimates）及未能有效的使用類比（failure to use analogies effectively）。

Steinberg, Sleeman, & Ktorza（1990）指出在學習代數時，很多學生並未有正確的「等價概念」（the concepts of equivalent equations）。多數學生學到的是如何運用轉換來解方程式，但卻不知方程式可用來判定兩者是否等價。也就是說，學生以機械化的方式列出解題式子，但並未眞正瞭解式子的結構與意義。例如：$3(X/2)-1=0$，該式可簡化成$3X-2=0$；但是，$3(X/2)-1=(3X-2)/2$這個式子是否可寫成$3X-2$呢？這就是一般學生觀念不清之處。MacGregor & Stacey（1993）認爲學生答錯的原因主要是學生企圖把文字由左至右轉換成

數學符號，這是一種「語句轉換」（ syntactic translation ）上的錯誤。

林清山、張景媛（民82）的研究中發現學生在解答一道數學文字題「大毛和小毛有零錢若干，大毛每天固定花2元，小毛每天固定花5元。4天前，小毛的零用錢是大毛的2倍。3天後，大毛的錢就和小毛一樣多了。問大毛及小毛現在各有錢若干？」在這樣的題目中，學生做的假設是「設X每天固定花2元，Y每天固定花5元」。這其中的想法是要將大毛設定爲X，小毛設定爲Y。這是因爲學生對教師所講的「設大毛爲X，小毛爲Y」的意義瞭解不清，因而形成此種錯誤概念。如果教師在說明時强調「設大毛現在有X元，小毛現在有Y元」，就能減少犯此種語言溝通時所可能引起的錯誤概念。

Cardelle-Elawar（ 1992 ）研究低數學成就學生的數學學習，結果發現要使數學低成就學生的解題能力有所進步，必須改善這些學生的語文能力，使學生能夠瞭解問題核心，並加强學生的基模知識。有適當可用的基模，纔能對問題產生一個以上的策略來進行驗證，最後也纔能驗算所得的結果。由於低數學成就學生的認知技巧相當缺乏，所以有必要以更明確的課程來教導這些學生，而不能只是等待學生自動的產生後設認知技巧。

在這些研究當中，我們可以歸納得知，學生會受整個文字題的複雜度、題目中未知數數量的多寡、及題目中負號及式子組合的影響，而對數學文字題產生錯誤概念。因此，數學文字題的教學應强調概念性的瞭解，才能導致基模的獲得，並建立解題的程序。教師唯有多問學生問題，瞭解學生的錯誤概念，才能設計適當的教學策略，幫助學生思考問題，從而建構出正確的概念。

四、學生建構數學概念的有關研究

Cobb（ 1990 ）指出傳統數學教學與建構論（ constructivism ）的立場有很大的不同。傳統的數學教學强調的是教師講、學生聽，教師只是單向式的傳授知識。而建構論則主張注重學生知識建構的歷程。建構論者認爲學生是學習中的主角，而非被動聽講的配角，教師的教材與教法要依據學生的程度而定。在教學方法上，教師與學生的交互作用是影響學生學習的一大要素。在環境配合上，應提供數學教師在職進修的機會，以使數學教師在教學內容、教學策略與教學態度各方面都有所改進。建構論者在過去十多年來已做了許多的觀察研究，他們也提出一些建議，希望對數學教育有所幫助。

Cobb（ 1990 ）認爲傳遞數學知識並無固定的教學策略，重要的是要讓學生在學習時能自我建構正確的數學概念。但是，這裡也有困難問題：教師應如何使用正確的方法引導學生瞭解自己的錯誤概念，進而自我思考，建構正確的概念呢？針對如何自我建構觀念方面，Cobb認爲有許多的教學策略可供教師採用，如：分組討論、口語互動、交互教學等。這些策略都强調教師只擔負一部份的責任，也就是說，教師主要的工作是提供數學規則，然後引導學生從自我建構中發現自己的錯誤概念，進而建立正確的數學知識。

學生在學習數學文字題時，可用到一種名爲「園徑策略」（ garden path strategy ）的方式。Frazier & Rayner（ 1982 ）認爲這種策略就是學生在閱讀題目時會先對內容做一個假設，當這個選定的假設能夠建立起一致有效的解釋時，就沒有問題產生。但是當原先的假設在下面的解題中不能有效達到目的時，解題者會警覺到有情況產生，因而重新建立假設，也就是修正原先的假設。這種建立假設的過程就是一種學習策略，目前已有學者在進行這方面的研究（ Balacheff, 1987; Laborde, 1990 ），而此種策略與教學心理學的看法是一致的，也就是不要怕學生答錯，也不要立即給學生正確的答案。而是要學生在先前的策略無法達到目的時，學習修正原先的策略，繼續嘗試下去。

Lo, Wheatley, & Smith（1994）研究指出知識之所以存在，是學習者努力將自己的學習經驗變得有意義。因此，數學教師在教學時，若强調有意義的教學，將能使學生建構出正確的數學概念。所謂有意義的教學則是教師要營造一個和諧的班級氣氛，然後教學生去進行有效的溝通。學生可以從小組討論中解決一些數學問題，發表個人的解題方法，觀摩他人的解題策略。在用此種教學方法時，教師的支持以及同儕的信任對於培養數學學習有很大的幫助。也就是說，數學思考的互動可以促進有意義的學習。

此外，Siegel（1981）及Shuell（1990）對於學生數學概念的建立，特別强調原有概念的重要性。他們認爲學習數學的心理歷程都是由前面的知識爲基礎，不斷的建構出個人的知識結構，且不斷的獲得新訊息以擴充整個知識內涵。Carey（1991）也認爲學生解決文字題的能力必須建構在他的現有知識上，並且不斷的擴充與修正。

五、數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究方法

在瞭解學生錯誤概念的研究上，目前强調質的研究方法對學生錯誤概念的分析有其特殊的貢獻。一般量的研究是以數量來表示統計的結果，其研究方法乃是經由測量來確立變項間的關係，並由現象的變化而瞭解其間的因果關係。量的研究有其一套完整的程序與步驟，以使研究設計能減少誤差、偏見和無關的干擾因素。至於質的研究，通常是以文字來敘述所要呈現的事實，它假定我們可透過個人與團體對情境的互動而形成一些建構。因此，質的研究方法關心的是由參與者的觀點來詮釋問題的眞象。

質的研究與量的研究其實並非各自爲政、互不相干的兩件事。在教學研究中，我們常需經由質的研究發現來進行量的實驗研究。因此，質與量的研究實際上是互補互助的兩種研究方法。目前，教學研究中常會使用放聲思考的方法來進行質的分析。也就是讓學生針對某項特定問題，將心中所想的儘量的說出來，然後經由原案分析，對學生的想法做深入的解釋。Brown（1987）曾提出口語陳述有三種方式，預測的口語陳述、同時的口語陳述、及事後的口語陳述。放聲思考就是一種口語陳述的方法，它强調的是同時的口語陳述。不過，在進行放聲思考時，由於學生的思路混亂或不習慣邊想邊說，因此，很難探知學生對某一特定問題的眞正錯誤概念。如果，在進行質的研究時，不能輔以其他的方法，或採用多種方法來進行分析，對研究問題的分析可能無法獲得另人滿意的結果。

Taylor & Bogdan（1984）指出質的研究是在產生一種描述的資料，內容則是包含人們所說的、寫的及所有可觀察的行爲。它以文字的形式呈現，而非一些量化的數據。近十幾年來，由於質的研究逐漸受到重視，許多學者也已接受將質的研究和量的研究同時納進研究中，尤其Jick（1983）所提出的三角檢核法（triangulation）採用多種方法來蒐集多種資料，並由多位專家進行資料的評量，這種嚴謹的研究方法十分值得推廣。詳細的說，Jick提出的三角檢核法是指在研究某一特定問題時，運用多種的方法來蒐集多方面的資料，以測出該問題的正確來源。也就是說，研究者使用不同的方法蒐集不同來源的資料，將可減低或避免研究者的偏見，而增進質的研究方法的信度。而且研究者可將蒐集來的資料請數位專家來評量，由專家一致的看法中，可確立問題之所在（黃瑞琴，民80）。由於三角檢核法的優點很多，例如可將各種資料加以比較，以檢視資料是否一致；從各種角度加以分析，可使資料更爲詳細與精緻；而且分析所得的結果因爲更加深入，解釋的內容也較具可信度等。因此，本研究中質的研究部分將採用三角檢核法加以分析。同時，爲了能深入瞭解學生如何建構出正確的數學概念，研究者亦兼採Vygotsky的微衍生法（microgenetic）的觀念，先蒐集初步資料，經過分析後，找出有關問題，然後進行第二次的資料蒐集，以期得到較爲完整且深入的結果（

Wertsch, 1981）。

研究方法

一、研究對象

本研究是以台北市螢橋國中二年級學生55名（男生30名，女生25名）爲研究對象。學生數學成績高、中、低者均包含在內，但不包含智能障礙及聽障、視障的學生。學生的選取是由導師依照學生的數學成績，分別由高、中、低成績中各抽取一位爲受試。此外，爲了蒐集解題專家對國中生解題歷程的看法，本研究也訪問了68位國中數學教師及師大數學系學生。

二、研究工具

本研究工具是使用數學測驗卷（甲、乙、丙卷）以及數學解題歷程評量表。此外，並準備錄音機，在學生進行放聲思考時，由主試甲加以錄音記錄。此記錄在主試甲分析後，再由主試乙重複分析。

三、資料的蒐集與分析

本研究採用質的研究法進行資料蒐集及分析的工作。在質的研究法中，本研究係參照民族誌學（ethnography）的研究方法（歐用生，民78）。此方法重視資料本來的面目，記錄被觀察者如何行動、如何反應、如何交互作用，其互動中的意義如何，以及如何加以詮釋等。同時，本研究爲增加研究的信度與效度，決定採用三角檢核法（triangulation），也就是採用多種方法，蒐集多項資料，及由多位主試者來加以分析（黃瑞琴，民80）。除三角檢核法外，本研究也用Vygotsky的微衍生法（micro-genetic）（Wertsch, 1981）的觀念，先蒐集初步的資料，在第一階段中分析學生的先前知識、思考模式、錯誤概念及理解困難之處。然後將第一階段分析中所發現的問題，再進行第二階段資料蒐集的工作，以便瞭解學生如何發現自己的錯誤概念，如何運用策略思考問題，以及如何突破理解困難之處，建構出正確的數學概念。本研究以上述方法進行資料的蒐集與分析，力求此項研究能具備完整性及客觀性，並具有深度研究的特性。

在本研究中採用兩種方法來蒐集學生的資料，並由兩位主試者來分析學生在數學文字題上的解題歷程，最後再蒐集數學教師對學生作答情形的看法及建議。本研究分兩階段進行研究，在第一階段的資料蒐集中，本研究者採用認知心理學研究中較常使用的放聲思考法（thinking aloud）來瞭解學生的認知歷程（Mayer, 1987）。放聲思考是一種主試者參與觀察的研究方法，但是國中生因過去缺乏陳述自己思考歷程的經驗，往往不容易用口語表達出來。因此，本研究者在實際試探瞭解學生的反應後，決定先由學生主動的放聲思考，讓學生在不受干擾的情境中將自己心中所想的儘量的說出來。當學生無法再做任何反應時，由主試者將事前預備好的數學解題歷程評量表的內容，一一提出來讓學生思考並做反應。也就是經由學生放聲思考（口語陳述）及經由數學解題歷程評量表上的問題思考兩種方式，來蒐集學生對數學文字題的先前知識、解題策略及其錯誤概念等資料。在記錄者方面，是先由主試（甲）當場記錄學生的反應，以及所觀察到的各種情況，包括受試的動作、表情，甚至於主試（甲）本人如何看待學生所做的反應，以及主試（甲）聽到學生所陳述的內容時所產生的想法。然後，主試（甲）將錄音帶攜回，由主試（乙）聽錄音帶並做記錄。主試（乙）除了無法觀察

到受試的動作、表情等反應外，對於受試所做的口語陳述也都一一記錄，並將自己如何看待受試的反應，以及自己聽到受試的陳述後所產生的想法，都加以詳細的記錄。在資料蒐集方面，除了由主試記錄學生的思考歷程外，另由研究者訪問國中數學教師及師大數學系學生，由他們根據個人的經驗來判斷學生作答時可能的思考策略或想法，並說明個人所可能採取的教學策略爲何。

在本研究的第二階段，是先進行主試者訓練，也就是依據資料分析的結果，找出有錯誤概念的學生，針對學生的錯誤概念，設計可能的引導策略來教導學生。希望對有錯誤概念的學生進行深度的訪談，也就是針對學生的錯誤概念來找出困擾學生數學解題的原因爲何，以便瞭解在引導思考教學策略中，何種情形較能使學生獲得理解或發現自己原先的錯誤概念，進而使用策略自動修正自己的錯誤概念，研究者希望能深入瞭解學生建構出正確數學概念的整個歷程。

在信度及效度的研究中，本研究者將兩位主試意見不一致的資料捨棄不用，最後所提出來的結果都是兩位主試間有相同看法的資料。在兩種方法（放聲思考及問題思考）上，研究者發現學生在放聲思考中所產生的錯誤概念，在問題思考上也會犯同樣的錯誤，可見學生並非無意中答錯，而是眞正有錯誤概念存在的情形。在兩項資料（學生放聲思考及教師對學生解題歷程的看法）上，研究者發現數學教師對學生數學解題歷程的看法與學生放聲思考時敘述的解題歷程大致相同，但對於錯誤概念的產生，則有些許差異存在。也就是說，教師對數學解題歷程較好的學生，較能正確的掌握學生的學習狀況；對於有錯誤概念的學生的解題歷程則較少有符合的情形出現。由這些資料得知，本研究者以三角檢核法來進行信度及效度考驗，大致能得到令人信服的結果。對於資料不符合之處，本研究者也另外提出比較分析的結果，以供客觀的評斷。

四、實施程序

本研究所需工具在先前研究時已一併編製完成，因此，就接著設計放聲思考及問題思考的記錄表格，並進行主試者的訓練工作。在本研究質的分析部份最重要的就是由主試去蒐集學生在解數學文字題時的思考歷程，而主試常犯的錯誤是以個人的思考策略影響學生的思考歷程，因此，主試者訓練工作相當重要。本研究的主試選自師大教育心理與輔導學系四年級學生，修過教育心理學、學習心理學、認知發展與輔導等課程的學生兩名，再由本研究者實施兩天的訓練，並以兩位國中生爲對象，練習訪談的技巧及資料記錄與資料分析的方法。在研究期間，本研究者隨時與主試保持聯繫，發現問題立即討論。在第一階段放聲思考及問題思考記錄中，每天主試甲記錄的資料及錄意帶隨即交給主試乙重複記錄並表示個人的看法，主試乙記錄的資料及錄音帶也立即交給主試甲重複記錄。

第二階段的資料蒐集工作主要是針對第一階段所得資料中有値得再深入探討的部份進行深度訪談。因此，主試者的訓練工作也是相當重要的。本研究者仍以第一階段的兩位主試者加以訓練，因爲她們對於學生的情形有基本的瞭解。同時，預定進行深度訪談的學生也是由這兩位主試提出，然後經過兩位主試與本研究者分析學生的狀況後，決定在第二階段進行引導思考教學策略時要如何引導學生。引導的過程中，特別注意不要干擾學生已有的思考歷程，而仍以學生個人原有的思考架構爲主，即使是錯誤的思考模式也好，鼓勵繼續想下去，藉以引導學生自己發現自己的錯誤概念，自己提出策略來修正原先的錯誤概念，直到自己建構出正確的數學概念爲止。在這段期間，主試的責任在提供支持與鼓勵，分析學生此時此刻的想法，並記錄學生原先困難所在、經過哪些嘗試、在何處產生轉折、和最後的頓悟點在哪裡等

要點。這項工作遠比第一階段放聲思考與問題思考記錄工作困難且複雜，可能會有個人主觀看法介入，因此，訓練工作也特別重要。最後，進行引導思考教學策略的資料蒐集工作。每位學生每道數學文字題的引導思考教學策略大約需花費一個半小時的時間來記錄，工作量十分繁重。

此外，本研究者將主試在第一階段所蒐集到的資料，請十八位國中數學教師以及五十位師大數學系學生加以分析，以瞭解專家（數學教師與數學系學生）是如何看待學生作答的情形，以及專家會如何來教這些數學文字題。

研究結果

本研究中質的分析共分三部分加以說明：㈠國中生數學文字題錯誤概念的分析，㈡專家與生手資料的分析，㈢學生建構數學概念之分析。

一、國中生數學文字題錯誤概念的分析

㈠放聲思考與問題思考資料的分析

本研究蒐集資料的方法有兩種。一種是放聲思考，由學生儘量將心中所想的解題方法用口語表達出來。另一種是問題思考，這裡的問題思考是以事前設計好的問題來問學生，包含語言知識、基模知識、策略知識及程序性知識四方面。問題思考是爲了彌補放聲思考蒐集資料之不足。以下舉一例加以說明。

題一：父親今年58歲，幾年前父親的年齡爲兒子的三倍，且父子年齡和爲68歲。問兒子今年幾歲？幾年前父子年齡和爲68歲？

A.放聲思考資料分析：

主試：先看一遍題目，然後把你心中所想的都說出來，你可以一面想一面說。

學生：…………設父親X，兒子Y…………

主試：然後呢？…………

學生：…………（用寫的）$X=58$，…………$X=3Y=68$

…………相減…………

$$\begin{array}{r} X=3Y=68 \\ -X\quad\quad=58 \\ \hline 3Y=10 \end{array}$$

（自言自語的說不可能）

主試：什麼不可能？

學生：3Y不可能是10…………

主試：你還想到什麼嗎？

學生：…………想不出來了

（放聲思考記錄結束）

B.問題思考資料分析

主試：現在我問你一些問題，請注意聽，並把你的想法說出來好嗎？

學生：好！

主試：這個題目中說父親現在幾歲？

學生：…………58歲

主試：很好！題目中說兒子現在幾歲？

學生：…………沒有說

主試：父親年齡爲兒子的三倍，是指現在還是過去？

學生：…………過去

主試：嗯！父子年齡和是68歲，這是指現在還是過去？

學生：…………沒有說…………大概是現在

主試：那麼，本題是要算什麼？

學生：…………兒子今年幾歲？…………

主試：還有沒有？

學生：…………幾年前父子年齡和爲68歲

主試：那麼，父親今年58歲，兒子的年齡會比58歲大嗎？

學生：不可能

主試：嗯！如果現在父親和兒子相差20歲，5年前父子相差幾歲？

學生：…………（受試拿起筆來計算）$58-20=38$，$38-5=33$（受試以實際的數字來計算）…………$38-20=18$，18歲，嗯…………不對！…………20歲

主試：五年前父子還是相差20歲嗎？

學生：對！

主試：好！幾年前父親年齡是兒子的三倍，現在還是兒子的三倍嗎？

學生：是…………（不肯定的樣子）

主試：如果五年前父子年齡和爲68歲，現在父子年齡和應是多少？

學生：…………73歲……

主試：題目中說當父親年齡是兒子的三倍時，兩人共幾歲？

學生：…………（用筆計算）$10\times3=30$，$30+10=40$，共40歲（受試未以題目中的已知條件作答）

主試：如果你要計算這一題，你要如何作假設？

學生：設父親爲X，兒子爲Y

主試：是現在嗎？

學生：…………幾年前

主試：好！幾年前父親X歲，兒子Y歲，那麼幾年前父親的年齡是兒子的三倍，這要如何表示？

學生：…………$X=3Y$

主試：嗯！幾年前父子年齡和爲68歲，這要如何表示？

學生：…………$X+Y=68$

主試：好！你能列出式子來嗎？

學生：…………
$$\begin{cases} X=3Y \\ X+Y=68 \end{cases}$$

主試：請繼續算下去！

學生：3Y＋Y＝68　4Y＝68　Y＝17　X＝3×17＝51
主試：算好了嗎？要不要檢查看看X是什麼？Y是什麼？
學生：…………X是幾年前父親的年紀，Y是幾年前兒子的年紀。
主試：那麼，題目問什麼？
學生：…………兒子今年幾歲，幾年前父子年齡和爲68歲？
主試：要繼續做嗎？
學生：…………不會做…………
（問題思考記錄結束）

由上例中發現，這位受試平時很少說話。在思考問題時，可能因思緒混亂，研究者只能由受試的放聲思考中獲得少數的訊息。以上面的受試爲例，主試進行放聲思考時，發現受試假設父親爲X，兒子爲Y。雖然受試未說明父親X是現在或幾年前的年齡，但從受試的式子中，我們發現受試寫X＝3Y＝68，所以他假設父親X應是指幾年前爲X歲。幾年前父親年齡是兒子的三倍，因此，受試前面寫X＝3Y是對的。但是接著題目說「父子年齡和爲68歲」時，受試不知如何將這句話的意思表達出來，也沒有想到要另外列一個式子。再由問題思考的記錄上來看，主試從題目中找出有關的問題來問學生，而學生針對系列的問題來作答。由此，主試得到一些補充的訊息。例如，學生對於語言知識並未能掌握得很好。由題目中「幾年前父親的年齡爲兒子的三倍，且父子年齡和爲68歲」的語意上，我們可以知道「父子年齡和爲68歲」這句話也是指幾年前的事。但是，學生就無法判斷前後兩句話的關係。此外，學生的基模知識也很欠缺，對於年齡差不變的觀念並不清楚；對於年齡間的倍數關係也從未考慮過；可見，學生容易受外在干擾因素的影響，無法掌握問題的重點所在。在策略知識上，學生的策略係來自數學教師平時慣用的教學方式，也就是先做假設，且假設的寫法並不清楚。不過，學生並非不能學會正確的數學概念。由主試初步問些問題就能激發學生一些正確的反應來看，只要運用適當的教學策略，大部分的學生還是可以建構出正確的數學概念。

㈡國中生數學文字題正確與錯誤型式的分析與詮釋

這部份是將學生在每道數學文字題上的正確解題與錯誤解題型式一一加以記錄與說明。學生人數爲55人。由於記錄的內容頗多，因此這裡只舉一道數學文字題加以說明。在這部分裡，研究者計算各種情況下學生出現的人數，並針對錯誤情形加以說明。至於其他各題則記錄於研究報告中。

題一：有一天阿諾對洛基說：「你這毛頭小子，6 年前我的年齡是你的三倍，隨著歲月增長，現在可能不只 3倍了。」洛基說：「你的數學眞差，到明年你的年齡只剩下我的 2倍而已，有朝一日，我還能迎頭趕上呢！」問阿諾及洛基現在各幾歲？

（正確一）13人

設阿諾現年X歲，
洛基現年Y歲

$$\begin{cases} X-6=3(Y-6) \\ X+1=2(Y+1) \end{cases}$$

（正確二）2人

設六年前阿諾年齡爲Y歲，
六年前洛基年齡爲X歲

$$\begin{cases} Y=3X \\ Y+7=2(X+7) \end{cases}$$

（錯誤一）1人

設六年前阿諾年齡爲Y歲，
六年前洛基年齡爲X歲

$$\begin{cases} Y=3X \\ Y+1=2(X+1) \end{cases}$$

說明：該生是用六年前的年齡來算，但是明年的年齡就必須加7而非加1。

（錯誤二）2人

設六年前阿諾年齡爲Y歲
六年前洛基年齡爲X歲

$$\begin{cases} X=3X \\ Y+7=2X \end{cases}$$

說明：該生是用六年前的年齡來算，但是明年的年齡阿諾和洛基應該同時加7，而非只有阿諾加7，學生似乎顧了這個就顧不了那個。

（錯誤三）5人

設阿諾爲X歲
洛基爲Y歲

$$\begin{cases} X-6=3Y \\ X=2Y \end{cases}$$

說明：該生假設未考慮是現年或過去，但以第一式X－6來判斷，X 應爲現年，所以該生未能理解阿諾應與洛基同時減少 6歲；此外，到明年應各加1歲。

（錯誤四）1人

設阿諾現在X歲，
洛基現在Y歲

$$\begin{cases} X-6=3(Y-6) \\ X+1=2(Y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X-6=3Y-18 \\ X+1=2Y+3 \end{cases}$$

說明：列式正確但計算錯誤。
在解 2（Y＋1）時，未知數用乘法，數字卻直接相加，所以成爲2Y＋3。

（錯誤五）1人

設阿諾爲X歲，
洛基爲Y歲

$$\begin{cases} X-6=3(X-6) \\ X+1=(X+1)^2 \end{cases}$$

說明：該生假設中有X及Y，但是式子中卻只有 X；此外，第二式用一元二次的方式來列式，似乎將用法混淆了。

（錯誤六）1人

設阿諾的歲數－6＝基的歲數×3

$$\begin{cases} X+1=2(X+1) \\ 3Y+6+1=2(3Y+6)+2 \end{cases}$$

說明：假設中無未知數X或是Y，但列式中有，而且該生的思路中有些特殊的想法，他將 X集中在第一式，Y集中在第二式。

（錯誤七）1人

設六年前阿諾年齡爲X歲
六年前洛基年齡爲Y歲

$$\begin{cases} 3X=Y \\ 2(X+7)=Y \end{cases}$$

說明：應是 $3Y=X$，該生以爲年齡大的要乘 3倍；此外，到明年時應是阿諾與洛基各加 7歲，所以應是 $X+7=2(Y+7)$。

（錯誤八）8人

此8人是以拼湊數字的方法在作答

（錯誤九）20人

完全空白

二、專家與生手資料的分析

(一)教師（專家）常用的解題型式

本研究詢問六十八位國中數學教師及台灣師大數學系學生，請他們提供自己在各題目中可能用來教導學生的解題策略，然後歸納出下列各種的解題方法，並呈現使用該策略的人占總人數（68人）的百分比。同樣地，這裡只舉一題爲例，其餘各題則記錄於研究報告中。

題一：有一天阿諾對洛基說：「你這毛頭小子，6 年前我的年齡是你的三倍，隨著歲月增長，現在可能不只 3倍了。」洛基說：「你的數學眞差，到明年你的年齡只剩下我的 2倍而已，有朝一日，我還能迎頭趕上呢！」問阿諾及洛基現在各幾歲？

(一) 21%	設六年前洛基是X歲，阿諾是3X歲 今年洛基是（X＋6）歲，阿諾是（3X＋6）歲 $3X+7=2(X+7)$
(二) 76%	設洛基今年X歲，阿諾今年Y歲 $\begin{cases} Y-6=3(X-6) \\ Y+1=2(X+1) \end{cases}$
(三) 3%	設六年前阿諾年齡為X歲 六年前洛基年齡為Y歲 $\begin{cases} X=3Y \\ (X+6+1)=2(Y+6+1) \end{cases}$

(二)專家與生手解題策略差異的比較

這一部分的研究是先由主試記錄學生（即本研究的解題策略生手）如何解題，然後再由主試請教國中數學教師以及師大數學系的學生（即本研究的解題策略專家）說明如果在教國中生解該文字題時，他們會以何種策略來教學。經過歸納整理後，本研究計算生手較常使用的解題策略及專家較喜歡使用的教學策略所佔的百分比。本研究者發現專家解題策略與生手解題策略在有些數學文字題上的差異並不明顯。例如上面所舉阿諾和洛基的例子，生手解答正確的策略正是大多數專家所採用的教學策略。但是有些數學文字題上，專家教學策略與生手解題策略就有明顯的差異存在。

題二：小明幾天前買了一堆蘋果和柳丁，每天各吃 1個，今天蘋果的數目恰為柳丁的二倍，且蘋果和柳丁共有60個，已知原有蘋果50個，問原有柳丁幾個？今天離買水果的日子有幾天？

(一) 25%	設蘋果現有X個 柳丁現有Y個 $\begin{cases} X=2Y \\ X+Y=60 \end{cases}$
(二) 25%	設今天柳丁X個，今天蘋果是2X個 $X+2X=60 \quad X=20$

(三) 43%	設柳丁原有X個，買水果距今Y天 $\begin{cases} 50-Y=2(X-Y) \\ 50-Y+X-Y=60 \end{cases}$
(四) 7%	設今天柳丁X個，Y天前買水果 $\begin{cases} X+2X=60 \\ 50-X=Y \end{cases}$

由題二的資料中，顯示專家教導學生時，最常用的教學策略是題目問什麼，就假設什麼。這樣解出未知數時，答案就出來了。所以，有43%的專家是這樣假設的：「設柳丁原有X個，買水果距今Y天」。而生手在這題中卻較常使用下面的解題方法：

設蘋果現有X個
柳丁現有Y個

$$\begin{cases} X=2Y \\ X+Y=60 \end{cases} \quad 3Y=60，Y=20，X=40，50-40=10，20+10=30$$

答：10天前，柳丁原有30個

由題二中，我們發現：專家列式的特點是解出式子就立即得到答案，也就是說，專家所列出的式子是相當完整的，不必再經過許多道轉換的手續。而生手列式的特點是式子要儘量的單純化。過於複雜的式子較易產生錯誤，所以生手會避免列複雜的式子。他們寧可多幾道手續，因爲這樣對生手來說感覺比較清楚。

三、學生建構數學概念之分析

此部份的研究採微衍生法來進行。在第一階段，先記錄受試者放聲思考及問題思考的資料。然後主試經過分析與討論，找出學生可能的錯誤概念，並據以決定如何實施引導思考教學策略。接著進行第二階段的引導思考教學策略的記錄。這部份是記錄主試運用策略來引導受試思考問題、解決問題的過程。從整個歷程中，我們可以看到受試原先的困難處在那裡，受試如何自己從困境中或是從主試的引導中發現問題，產生頓悟，最後突破困境，求得正確的答案。這整個資料的描述即爲學生建構正確數學概念的歷程，可以提供教師教學時的參考。由於受試的記錄頗多，這裡只列出一位受試部份的記錄資料，詳細資料請參考張景媛（民83）的博士論文。

受試記錄：國二學生，女生，成績中等

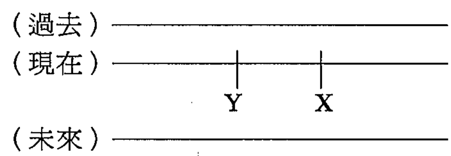
題目：張老師對王同學說：「我在你這年齡時，你只有 1歲，等你到你現在年齡的3倍少3歲時，我就52歲。」問張老師及王同學現在各幾歲？

A. 放聲思考資料逐字稿	主試的註解
主試：請先將題目看一遍，然後一面想一面將所想到的說出來，不要怕說錯，盡量的想什麼說什麼。	
學生：………………	
主試：你在想什麼？	
學生：………假設…………	
主試：很好！說出你的假設。	
學生：…………設老師X歲時學生1歲，……老師52歲時，學生就…………（3Y－3）歲…… $\begin{cases} 3Y-3=52 \\ X-Y=1 \end{cases}$ （以下省略）	學生猶豫不決的樣子

B. 引導思考教學策略資料逐字稿	主試的註解
主試：現在，請你先畫出三條線，愈向右表示年齡愈大。	希望讓該生自己動手畫畫看
學生：……………………	
主試：畫得很好！現在一條代表過去，一條代表現在，一條代表未來。剛才，你是如何假設的？	
學生：…………設老師現在X歲，學生現在Y歲。	
主試：你能在「現在」的線段上畫出老師和學生的年齡嗎？	
學生：…………………… 畫這裡可以嗎？	
主試：沒有關係，先依自己的判斷畫上去，如果覺得不理想還可以	

修改。

學生：………………………



主試：你爲什麼Y寫左邊，X寫右邊？

學生：…………因爲老師比較大。

主試：很好，你考慮得很周詳。那麼過去應如何畫才對？

學生：……………………… 停頓許久，很爲難的樣子。

主試：能把題目上有關過去的意思唸出來嗎？

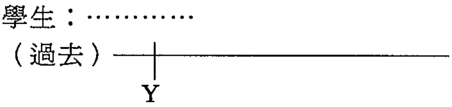
學生：…………「我在你這年齡時，你只有1歲」……

主試：對了！誰只有一歲？

學生：學生

主試：好，畫出來。

學生：…………



主試：對！學生一歲時，老師幾歲？

學生：…………沒有說…………

主試：那麼「我在你這年齡時」是什麼意思？

學生：…………不知道…………

主試：好！現在以我們兩個來說，你幾歲？

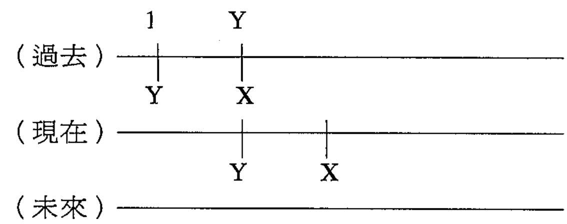
學生：13歲

主試：對！你現在13歲，我現在28歲了，但是過去我在你這年齡時，是說我幾歲的時候？

學生：………………………13歲？ 不能肯定自己的答案對或不對，這是一個重要的關鍵點

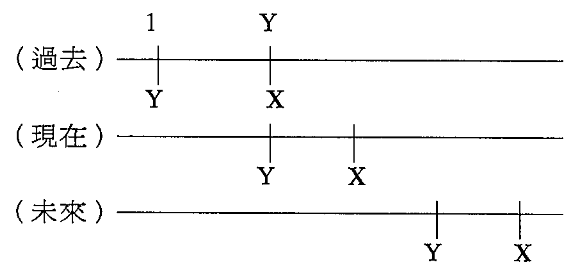
主試：對啊！我在你這年齡時就是你現在的年齡嘛！那麼會不會畫在線段上了？

學生：…………



主試：很好啊！再畫未來的圖。

學生：……



主試：很好！你的觀念很正確，老師的年齡都比學生大，所以都要放在右邊的位置。好！現在老師X歲，學生Y歲。未來，學生的年齡怎麼表示呢？

因爲該生在放聲思考時就會寫出 3Y－3這個式子，所以先讓她列該式子。

（以下省略）

在上面的例子中，主試由第一階段的放聲思考資料中，發現學生一直未去思考年齡間差距的問題。因此，主試們在經過討論研究後，就從學生未能掌握的關鍵處開始引導，採用繪圖法及口語互動的方式，以系列的問題引導學生去思考題意。例如，主試讓學生先畫出三條線，一條代表過去，一條代表現在，一條代表未來。接下來的問題是要依題意在線段上畫出教師與學生年齡的位置。在這地方最難的問題是畫在哪個位置才是最正確的，主試並未要求學生立即畫出正確的位置，而是依估計，在可能的地方畫出教師及學生的年齡。就算是位置畫得不合理也無所謂，主要希望學生由實際操作過程中瞭解師生年齡差距的問題。這個受試由開始引導思考到最後列出正確的式子，雖然花費的時間非常多，但是所獲得的效果也很大。由此例子可知，教師們可用引導思考的方式，教導數學低成就學生自己思考問題，進而建構出正確的數學概念，事實證明低成就學生也有學習的能力。

討　　論

本研究的目的在瞭解國中生對數學文字題的錯誤概念及學生如何建構出正確的數學概念。從前面研究結果的記錄中，研究者已將兩位主試意見不一的資料刪除，然後將意見一致的部分加以討論。

一、國中生數學文字題錯誤概念之研究

由本研究質的分析所得資料來看，國中生對數學文字題的錯誤概念可分四部份來討論：一是語言知識的部份、二是基模知識的部份、三是策略知識的部份、四是程序性知識的部份。以下分別加以說明。

㈠語言知識的錯誤概念分析

1.學生看題目時，常忽略題目中關於「時間」的描述。如「5年前父親的年齡是兒子的2倍」，90%以上的受試者未注意到時間的訊息。

2.學生對連接詞用法的瞭解會影響其解題方法。如學生對於「幾年前，父親的年齡是兒子的三倍，且父子年齡和68歲。」這個句子，他們知道父親年齡是兒子的三倍是幾年前的情況，但父子年齡和爲68歲就不知是幾年前的情形，會誤以爲是現在的狀況。

3.學生對於指定句和疑問句產生的錯誤較少，但是對於關係句就會有許多的問題產生。如「我在你這個年齡時，你只有一歲。等你到你現在年齡的三倍少三歲時，我就52歲。」這一段有關兩人之間年齡的描述常會令學生感到困擾。

4.學生認爲題目中有數字才是要運算的，沒有數字的句子就是不用的句子。所以像「載運量增倍」這種語句，對學生也造成困擾，他們認爲題目中沒有說載運量是多少。

5.學生對於某些關鍵字不瞭解。例如「增倍」是指增加一倍的意思，但學生會誤以爲是增加兩倍。也有學生認爲「增倍」不是數字，沒辦法算。

6.學生對於代名詞的用法不清楚。例如：阿諾對洛基說：「6年前，我的年齡是你的三倍」，學生無法轉換成「六年前，阿諾的年齡是洛基的三倍」。

7.學生面對較長的數學文字題時，常不知重點所在，不知從何處著手，所以會立即放棄思考問題。

8.學生在看完數學文字題時，通常只記得算出一個答案，而忽略問題中需要解出兩個答來。

9.學生在看題意時，看了後一句就已忘了前一句，他們無法同時記住許多條件，因爲他們每看一句就得思考這句話的意思，以致工作記憶運作得十分忙碌，而無餘力思考彼此間的關係。

㈡基模知識的錯誤概念分析

1.學生缺乏時間與數量間關係的基模知識。學生不瞭解兩個存錢筒每天各存一元，則兩筒的錢一天增加的是二元。同樣的，父子的年紀每年各增一歲，則父子年齡和應是每年增加兩歲。

2.學生常憑直覺或是關鍵字做反應，而使用了錯誤的基模知識。如「父子現在相差20歲，5年前相差幾歲？」學生一看是問相差幾歲，就開始用減法計算，很快的回答相差15歲。他們未考慮到整個情況，而誤用減法的基模知識來解決問題。

3.學生缺乏倍數的基模知識。學生對於誰是誰的幾倍最容易搞混。如張三的錢是李四的2倍，學生假設張三的錢是X，李四的錢是Y，但列出的式子卻是2X＝Y。

4.學生認爲一元一次方程式的解法比二元一次簡單，因而會傾向使用一元一次方程式來解題。但是有些題目對國中生來說必須運用二元一次方程式才能解題，因此有些學生就無法順利作答。

5.學生做假設的基模知識不足，不瞭解做假設是爲了列出式子來解決問題，因而所做的假設會與自己所列出來的式子毫不相干。

6.學生缺乏基本的數學概念，如「-4天」的答案照常理判斷是不可能的情況，但學生卻

無法察覺到此種答案的不合理性。

*7.*有些學生的思考模式和基模知識，有功能固著的現象，因而造成他們在解答數學文字題時，不管問題的性質，都固定套用他們習慣使用的基模知識。

*8.*有些學生在除法上的基模知識有錯誤，如兩個數要相除，他們以為一定是大數除以小數。

*9.*誤將乘法的交換律類推到除法上。如3×5可以換為5×3，所以學生誤以為除法也可以交換。如將a/b換為b/a。

*10.*學生將分數看成分子和分母兩個數，所以1/3不等於2/6。他們不認為1/3是一個數。

*11.*有的學生假設的X和Y可以適用於過去、現在及未來，他們認為X和Y可以隨時轉變成各種數字。

㈢策略知識的錯誤概念分析

*1.*學生未能瞭解已知條件和未知條件的關係，因而在做假設及列出式子時，未能切題列出正確的方程式。

*2.*學生的策略知識不足，無法針法不同的問題，採用適當的策略來解題。

*3.*學生做假設時，通常是問什麼就假設什麼，不考慮是否有其他簡易的方法。

*4.*學生會依固定模式做假設，然而卻無法依假設列出式子。也就是說，學生做假設是一回事，列式子又是一回事，兩者無法連貫。

*5.*當題目提到「每天存一元」、「每天花五元」等的語句時，學生都以加一或減五來計算，因此變成了總共才存一元或花五元的情形。這是因為學生沒有使用策略將「每天存一元」或「每天花五元」的意義表現出來。

*6.*學生以為題目中所有的已知條件都會用到，因此，想盡辦法要將所有的已知條件都列入式子中。

*7.*學生的思考無法前後連貫。如在二元一次的方程式當中，第一個式子就和第二個式子常各行其是，無法產生關聯。亦即學生對問題缺乏整體性的瞭解。

*8.*學生在引導思考時都能回答老師的問題，可見他們能瞭解題意，但是卻無法列出式子，亦即他們無法將題目中的條件加以表徵和組織成完整的方程式。

*9.*學生對於二元一次聯立方程式的觀念不清，所以假設了X和Y兩個未知數，卻用一個式子來表示。例如：

幾年前父子年齡和為68歲

$$\begin{cases}(58-Y)+(X-Y)=68\\(58-Y)=3(X-Y)\end{cases}\quad\text{結果寫成}\quad(58-Y)+3(X-Y)=68$$

（幾年前父親年齡是兒子的三倍）

*10.*學生沒有等號兩邊相等的概念，所以列出來的式子並未兩邊相等。

*11.*學生在解題時常會受前一題題型的影響而在做下一題時誤用了解題方法。如果前一題的題目是有關年齡的問題（例如年齡愈變愈大），而下一題的題目是有關吃水果的問題（例如水果愈吃愈少），他們就會用解前一題的方式來思考第二題（因而變成水果愈吃愈多了）。

㈣程序性知識的錯誤概念分析

*1.*在解代數方程式時，最常出現的問題是移項時產生錯誤。

-X＝3Y－58　變成　X＝58＋3Y（應是X＝-3Y＋58
（或是X＋3Y＝58）

2.不會用消去法合併聯立方程式。例如：

$$\begin{cases} 2X-4Y=60 \\ 2X-Y=120 \end{cases}$$ 消去2X後，學生寫成　-5Y＝60　Y＝-12

3.學生不懂合併是爲了消去一個未知數，所以出現下面的情形：

$$\begin{cases} 120=2X-Y \\ 120+X-2Y=150 \end{cases}$$ 學生消去120　變成　X－2Y＋2X－Y＝150

4.學生未先將未知數加以整理，未知數有的在等號左邊，有的在等號右邊。如果是專家也許較不易發生錯誤，但是，學生就很容易因而產生問題。

5.學生在消去括號時有可能產生錯誤，例如：

52＋3Y＝4（X＋Y）　變成　52＋3Y＝4X＋Y（應是4X＋4Y）

6.學生在代入公式時會產生錯誤，例如：

Y＝-50＋2X　現在要將Y代入-2Y時，學生寫成

-2（50－2X）　他認爲Y要變換符號。

7.學生在化解分數的式子時，常易生錯誤，例如：

（58－X）／3＝58／3－X

8.大多數學生的程序性知識優於策略知識，但卻有少數學生對題目中語句間的關係掌握得很好，能夠列出很完整的式子，但是卻不會運算。他們的策略知識顯然優於程序性知識。

Mayer（1987）所說的四個階段分法來分析學生在各階段上的錯誤概念，可以瞭解一般學生可能的錯誤概念有那些。但是，要瞭解個別學生的思考問題，還是要運用放聲思考、引導思考的方法來蒐集資料較爲理想。

過去學者對於學生的數學文字題的錯誤概念進行分析時，很少系統性的加以探討，大多是只針對學生的某幾種錯誤概念提出看法。例如，Larborde（1982）曾指出有的學生不會描述各個變項之間的關係；MeCorte et al.（1985）認爲語句結構愈清楚，學生就愈能解出答案；Hinsley et al.（1977）指出學生的錯誤概念有使用不當的基模、做錯誤的估計及未能有效使用類推；Steinberg et al.（1990）發現學生不瞭解方程式的兩邊是相等的；MacGregor & Stacey（1993）則發現在將文字轉換成數學符號時常易犯錯誤。

由上述學者們的研究可知，大多數學者的研究雖然對於瞭解學生在做數學文字題所犯的錯誤概念能有所貢獻，但這些研究結果都是零碎的，未能做統整性的分析。因此，本研究乃針對學生數學文字題的解題歷程，以質的研究方法從語言知識、基模知識、策略知識及程序性知識等四方面進行系統性的研究。此項研究雖然費時費力，但本研究者能對學生在解題時有可能犯錯的概念盡其所能的蒐集，並加以分類。此項研究結果至少具有下列幾點助益：1.可讓數學教師瞭解學生有可能犯錯的概念，使其在教學時能特別注意到學生的學習困難，而改善其教學方式。2.能提供數學教師在評量學生時的命題的參考，教師也可針對學生易犯的錯誤概念命題，以偵測學生學習困難之所在。3.能提供數學教師在進行個別輔導教學時的參考。對於少數數學學習有困擾的學生，教師在個別教導時，可以採用本研究中所使用的放聲思考來瞭解該生的錯誤概念，並以此爲基礎，引導該生思考問題、建構數學概念，達到有效學習的境界。4.可做爲數學教材編輯者的參考。數學教材可按照本研究所提出的數學解題歷程進行編寫，因爲循序漸近的教材、多樣化的呈現方式比較能爲學生所接受，教師亦較能有

所依據。

二、專家與生手思考模式的比較研究

關於專家和生手的差異比較，已經有多位學者提出他們的看法。如Mayer（1987）認爲專家比生手擁有較多的知識，而且專家在解題策略上也和生手有所不同。專家習慣用正向思考（work forwards）的解題方式，亦即由已知條件直接求得答案；而生手則傾向使用逆向思考（work backwards）來解題，他們是由所要求得的答案逐步回溯到已知的條件。由於專家和生手的解題方式不同，Larkin et al.（1980）發現專家的解題時間只要生手的四分之一即可，且較少發生錯誤。此外，Larkin et al.（1980）也發現生手往往需要多列一些方程式，然後用代入法去解題。而專家可由已知條件列出快速易解的式子求得答案。

上面學者的研究是以物理科目來進行研究所得到的結果。至於專家和生手在解數學文字題上的差異，則較少學者進行比較。本研究以國中數學教師和師大數學系學生爲專家，以國中生爲生手，來比較二者在數學文字題解題策略上的差異。結果發現其主要差異如下：

1. 專家是以完整的概念來呈現問題情境，而生手則無法通盤理解整個情境。
2. 專家以自認爲最清楚、最容易的方式來教學生，卻不一定是生手最易理解的方式。
3. 專家思考模式中會呈現跳躍的情形，也就是能掌握問題的重點，不會受一些無關條件的影響，而這正是生手最感困擾的地方。生手無法掌握問題的核心，不能釐清已知條件和未知條件之間的關係。
4. 專家希望學生愈簡化式子愈好，專家教學時也以自己認爲最簡潔的式子來呈現，過於簡化的結果反而使學生無法瞭解老師教學的內容。
5. 專家能將其心中所想的觀念用符號表達出來，但生手有時所列出來的式子和自己口中所說的意思不同，這主要是生手還不善於用數學符號來表達自己的概念。

本研究雖然以數學文字題爲研究的題目，但所得結果大部份都和Mayer（1987）及Larkin（1980）的研究結果類似，亦即專家和生手在思考模式上確有不同存在。

三、放聲思考與問題思考方法的比較研究

本研究以放聲思考與引導思考兩種方法來蒐集資料，結果發現在放聲思考時，學生如果會說出心中所想的事，主試較能發現學生眞正內心中所產生的概念是什麼，這些內在的想法是在未受外在因素干擾的情形下自發性的產物。但是，這種會將心中所想的儘量說出來的學生並不多，大多數的學生在放聲思考時的表現都是想一陣子，心中已經決定如何做了，才一次把話講出來。所以在他思考的一段時間中，他曾經怎麼想，主試通常不知道。還有一部份學生無法將心中的概念表達出來：有些是不善於用語詞表達內心的想法，有些學生則可能認爲自己的想法是錯的，所以不敢講。在這種情形下，如果研究者堅持只用放聲思考法，可能對學生的解題歷程會一無所獲。

另一種方法是問題思考，也就是事先由主試準備好一些題目，當學生在每一道題目進行放聲思考後，立即由主試加入問題思考的題目。本研究是採用Mayer（1987）所提的解題歷程的四步驟（語言知識、基模知識、策略知識及程序性知識）來設計題目，以便瞭解學生在每一部分的知識如何，和放聲思考相比，問題思考很明顯的缺點就是會影響學生原先的思考方式。本研究者爲了將此缺點降至最低，在語言知識及基模知識的問題上，是由研究者事先設計好題目，然後讓主試照著問學生。但是在策略知識上，本研究者訓練主試依學生自己所做的假設來問。因此，主試必須有臨場反應的能力。如學生假設現在兒子X歲，主試就問幾

年前兒子的年齡要如何表示；又如學生假設四天前大毛有X元，主試必須會問三天後大毛的錢要如何表示。由問題思考的資料蒐集中，本研究者發現可以得到學生在放聲思考以外的許多的想法，也就是可以發現學生原先未曾想到的問題，而這些問題會影響到學生解決問題的能力。因此，由放聲思考與問題思考兩種方法中，兩者互有優缺點，但是在互補的情形下，研究者得到許多寶貴的資料。

結論與建議

由本研究中所得的結果，研究者得到下面幾項結論：

1. 國中學生在學習數學文字題時常會受自己過去經驗的影響。國中學生在小學時的學習經驗中，有正確的數學概念，也有錯誤的數學概念。錯誤的數學概念常常成爲目前解數學文字題（代數）時的障礙，而正確的數學概念中，也不一定都能直接用在目前國中的數學文字題上。因此，數學教師有必要對國中學生說明某些數學觀念在國中和國小之間的差異，以免他們會有誤用的情形。

2. 由本研究顯示，學生在數學文字題上的錯誤概念可透過質的分析來加以研究。研究者發現學生在語言知識、基模知識、策略知識以及程序性知識上都會有錯誤概念產生。由本研究者有系統的整理出學生的錯誤概念，可提供國中數學教師教學時的參考。

3. 教師如何看待學生的錯誤概念，對學生建構正確的數學知識有很大的影響。教師要能由學生的思考模式著手，多瞭解學生的邏輯觀念，思考學生爲何會有此種想法，才能有效幫助學生建構正確的數學知識。

4. 教師除了要瞭解學生的錯誤概念外，最重要的是要思考如何運用策略來引導學生修正自己的錯誤概念，進而建構正確的數學知識。基本上，教師教學的原則是「協助」學生發現自己的錯誤概念，並「協助」學生自己想出辦法來解決問題，而不是由教師直接告訴學生答案。

本研究者由結果中提出幾項建議作爲未來研究時的參考。

㈠將常見的錯誤概念納入敎師手册中以供敎師參考

從本研究採質的研究法，我們由學生實際的反應中，蒐集到許多學生可能發生的錯誤概念。若能將這些學生常犯的錯誤概念納進教學手冊裡，相信這些資料對新老師將會有很大的幫助。因爲新教師缺乏教學經驗，雖然很努力的教學，但並不瞭解學生會有那些錯誤概念，而造成教學上的挫折感。每位新老師都必須經過一段不算短的時間來自己摸索教學中可能產生的問題。有些問題的確要由個人親身經歷後，才能眞正領悟如何處理的更爲圓滿。但是，有些問題如能及早知道與預防，當可減少教學的挫折感，並可改善學生的學習困擾。

㈡深入探討質的研究法中的有關問題

本研究中使用三角檢核法以及微衍生法的觀念進行研究，這種研究方法過去較少實際運用在各項研究上，所以對於此種研究方法的一些問題，也較少討論到。本研究者認爲質的研究的確可以蒐集到一般量的研究所無法獲得的寶貴資料。但是，有些資料，如兩位主試意見不一時，在本研究中是將這些資料廢棄不用，只選用兩位主試意見一致的資料。研究者認爲此項問題值得再加以研究，因爲這些資料也許比主試意見相同時的資料更值得探討。

參考書目

呂溪木（民72）：從國際科展看我國今後科學教育發展的方向。**科學教育月刊，64期，** 13－19。

林清山、張景媛（民82）：國中生後設認知、動機信念與數學學習之關係暨代數應用題教學策略效果之評估（I）。**師範大學教育心理學報，26期，** 115－137。

張新仁（民78）：學習策略訓練之初探。**國立高雄師範學院「教育文粹」，第18期，** 86－94。

黃瑞琴（民80）：**質的教育研究法**。台北：心理出版社。

單文經（民81）：**課程與教學研究**。台北：師大書苑。

歐用生（民78）：**質的研究**。台北：師大書苑。

Balacheff, N. (1987). *Towards a problematique for research in mathematics teaching.* Paper presented at the meeting of the Special Interest Group for Research in Mathematics Education, Anaheim, CA.

Brown, A.L. (1987). Metacognition, Exeuctive Control, Self-Regulation, and Other More mysterious Mechanisms. In F.E. Weinert & R.H. Kluwe (Ed.), *Metacognition, Motivation, and Understanding.* London: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, J.S., & Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2,* 155-192.

Cardelle-elawar, M. (1992). Effects of teaching metacognitive skills to students with low mathematics ability. *Teaching & Teacher Education, 8,* 109-121.

Carey, D.A. (1991). Number sentences: Linking addition and subtraction word problems and symbols. *Journal for Research in Mathematics Education, 22,* 266-280.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L., Chiang, C.P. & Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: An experimental study. *American Educational Research Journal, 26,* 499-531.

Carpenter, T.P., Fennema, E., & Franke, M.L. (1992). *Cognitively guided instruction: Building the primary mathematics curriculum on children's informal mathematical knowledge.* Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Carpenter, T.P., & Moser, J.M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquesition of mathematical concepts and processes* (pp. 7-44). NY: Academic Press.

Cobb, P. (1990). Multiple perspectives. In L.P. Steffe & R. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education: International perspectives* (pp. 200-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Davis-Dorsey, J., Ross, S.M., & Morrison, Gr. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematics word problems. *Journal of Educational Psychology, 83,* 61-68.

Frazier, L., & Raynier, K. (1982). Making and correting errors during sentence comprehension. *Cognitive Psychology, 14*, 178-210.

Hinsley, D.A., Hayes, J.R., & Simon, H.A. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In M.A. Just, & P.A. Carpenter (Eds.), *Cognitive processes in comprehencion* (pp. 89-106). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jick, T.D. (1983). Mixing qualitative and quantitative methods: Triangulation in action. In J. VanMaanen (Ed.), *Qualitative methodology* (pp. 135-148). Beverly Hills, CA: Sage.

Laborde, C. (1990). Language and Mathematics. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Ed.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. NY: Cambridge University Press.

Lo, J.J., Whearley, G.H., & Smith, A.C. (1994). The participation, beliefs, and development of arithmetic meaning of a third-grade student in mathematics class discussions. *Journal of Research in Mathematics Education, 25*, 30-49.

Low, R., & Over, R. (1983). Gender differences in solution of algebraic word problems containing irrelevant information. *Journal of Educational Psychology, 85*, 331-339.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). *Cognitive models underlying students' formulation of simole linear equations*.

Mayer, R.E. (1987). *Educational Psychology: A cognitive approach*. Boston: Little, Brown and Company.

Muth, K.D. (1991). Effects of cuing on middle-school students'performance on arithmetic word problems containing extranious information. *Journal of Educational Psychology, 83*(1), 173-174.

Pines, A.L. (1980). *A model for program development and evaluation: The formative role of summative evaluation and research in science education*. Paper presented at the Annual Conference of the International Congress for Individualized Industruction (12th, Windsor, Canada).

Royer, J.M., Cisero, C.A., & Carlo, M.S. (1993). Techniques and procedures for assessing cognitive skills. *Review of Educational research, 63*, 201-243.

Shuell, T. (1990). Phases of meaninful learning. Review of Educational Research, 60, 531-547.

Siegel, A.W. (1981). The externalization of cognitive maps by children and adults: In search of ways to ask better question. In L.S. Liben, A.H. Patterson, & N. Newcombe (Eds.), *Spatial representation and behavior across the lifespan* (pp. 167-194). NY: Academic Press.

Stainberg, R.M., Sleeman, D.H., & Ktorza, D. (199). Algebra students' knowledge of equivalence of equations. *Journal of Research in Mathematics Education, 22*, 112-121.

Taylor, S.J., & Bogdan, R. (1984). *Introduction to qualitative research methods: The search for meanings*. NY: John Wiley & Sons.

Vergnaud, G., Booker, G., Confrey, J., Lerman, S., Lochhead, J., Sfard, A., Sierpinska, A., & Wheeler, D. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. NY: Cambridge University Press.

Wertsch, J.V. (1981). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. NY: M.E. Sharpe.

Bulletin of Educational Psychology, 1994, 27, 175～200
National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, R.O.C.

THE ANALYSIS OF MISCONCEPTIONS OF MATHEMATICS WORD-PROBLEM AND THE WAY OF STUDENTS' CONSTRUCTING MATHEMATICS CONCEPT

Ching-Yuan Chang

ABSTRACT

The purposes of the study were to investigate students' misconceptions in dealing with mathematics word problems with the use of qualitative analysis, and further to explore the ways in which the students construct correct mathematical concept. The study was related to qualitate analysis inolving thinking-aloud and thinking-by-questioning methods. The subjects chosen consisted of 90 eighth-grade students. The study intended to analyze the students' misconceptions of linguistic knowledge, schematic knowledge, strategic knowledge, and procedural knowledge in solving mathematics word problems. In addition, it also investigated how the students taught by thinking-by-guiding strategies form their correct mathematical concept.

Key words: Mathematics word-problem, misconception, linguistic knowledge, schematic knowlege, strategic knowledge, procedural knowledge, thinking-aloud