國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系
教育心理學報，2016，47 卷，4 期，581-601 頁
DOI：10.6251/BEP.20150603

兩種線段圖表徵解題策略在學習成效上的比較*

黃一泓
國立臺中教育大學
數學教育學系

謝進泰
台中市立
益民國民小學

本研究探討國小六年級學童在「基準量與比較量」單元中，使用長度線段圖與成比例線段圖表徵的解題策略時，對學童所產生的認知負荷與學習成效的影響。研究者先以 Schnotz 提出的文字與圖像理解的整合模式（integrated model of text and picture comprehension）為依據，分析兩種表徵解題策略的認知過程，並以認知負荷理論為基礎，探討兩者在認知負荷上的差異。研究方法採取真實驗設計，以三階段的實驗來驗證此分析的論點，並且得到下列結論：成比例線段圖表徵的解題策略在後測成績的表現顯著優於長度線段圖表徵的解題策略。然而，當學童學習「比與比值」單元後，兩種不同表徵解題策略在延宕測驗的表現並沒有顯著差異。最後，針對研究的結果，提出線段圖表徵解題策略在教學上的意義。

關鍵詞：表徵、認知負荷理論、線段圖

在國小高年級階段，使用線段圖作為教學輔助工具來協助學童理解題意，進而解題，是教科書及在職教師經常採用的一種教學表徵。然而，線段圖描繪方式的不同，意味著教學者所欲表達的教學概念有所差異。當學童以他現有的數學概念來理解線段圖所表達的關係時，可能會因為這個差異造成學習成效上的影響。再者，教學者引入線段圖表徵的目的在於期待學童能理解表徵背後所表達的關係，進而從表徵所建立的模式來萃取出新的訊息，因而達到解題的目的。因此，引入線段圖表徵來解題不僅僅只是讓學童模仿此解題策略的程序，而是期待學童能理解線段圖表徵解題策略所表達的數學概念，進一步的應用此概念來解題。所以，研究影響能達成此一目標的主要因素將是本研究的最大動機。

引入線段圖的目的，主要是把問題情境以線段圖示表現出來，並透過線段圖表徵促進學童解題能力。從朱建正與吳昭容（1993）的研究說明：大約至六年級才有較多學生能有效的運用有意義的空間關係。用畫圖方式呈現問題，或在文字題上附加圖畫（Cohen & Stover, 1981），可以使數學問題較易理解而增加解題成功的機會。現今數學課程已廣泛的使用線段圖來協助解題，因為它能將文字題當中的數量關係具體化（陳竹村，1998）。而林施君（2013）的研究發現：國小五年級學童接受五步驟之線段圖策略教學後，大多會嘗試把線段圖畫出來，清楚看出數量間的關係，也

---

* 本文通訊作者：黃一泓，ehhwang@mail.ntcu.edu.tw。
本文獲科技部經費補助，計畫編碼：MOST 103-2410-H-142-019

會從線段圖的表徵，運用加減及乘除互逆的概念來解題。李玉珍（2013）的研究也說明：低成就學童無法從線段圖的教學來解決「基準量與比較量」問題，高成就學童則能藉助線段圖的輔助，表徵題意，進而解題成功。

Koedinger 與 Terao（2002）藉由有寬度的條狀圖示，教導學童解決代數文字題，並且採用 ACT-R 理論（Anderson, 1996）的生成規則（production rule）來進一步分析學童的認知過程，他們認為：雖然圖形可以加強學生的了解與學習，但是，有彈性且理解的來學習使用圖形表徵依然不是那麼容易。然而，並沒有提到是甚麼樣的因素造成這樣的結果。

認知心理學家 Kintsch（1998）將理解視為建構內部心智表徵的過程。因此，藉由線段圖的輔助來理解題意，即可視為建構內部心智表徵的過程。而此過程在學習者內部所建構的內在表徵則稱為心智模式。由此，我們可將線段圖視為學習者在解題過程中作為心智模式建立的輔助工具，也就是說當學習者閱讀文字題目時，可能無法順利建立一個心智模式，而線段圖可以輔助學習者去建立這樣數量關係的心智模式。因此，本研究將採用 Schnotz（2005）提出的文字與圖像理解的整合模式（integrated model of text and picture comprehension, IMTPC）為理論基礎來解釋此一心智模式的建構過程。

在國內，以認知負荷的觀點來探討使用線段圖表徵作為解題策略的研究並不多。根據 Sweller（2010a）認知負荷理論的新模型：以互動元素量定義學習者所感受的認知負荷，內在負荷的高低取決於該學習內容對學習者的互動元素之多寡而定。不同程度的學習者所感受的內在負荷自然不同，而其互動元素的量是無法被外在的教學過程來改變的，但可經由基模的獲得和自動化來降低互動元素的量，降低互動元素量即可降低內在認知負荷，而降低內在負荷就可以降低整體認知負荷。因此，學童的個體差異是否會影響他們對於不同線段圖表徵的理解？也就是說，當學童的先備知識有所差異時，也會影響不同線段圖表徵解題策略的應用程度，而此差異是否會進一步的表現在學童的解題成效？

一、研究目的

基於以上理由，本研究將探討國小六年級學童在「基準量與比較量」單元中，使用不同線段圖表徵的解題策略時，對不同程度的學童所產生的認知負荷與學習成效的影響。研究者先採用 Schnotz（2005）提出的文字與圖像理解的整合模式來分析長度線段圖與成比例線段圖兩種不同表徵解題策略的認知過程，並以 Sweller（2010a）認知負荷理論的新模型為基礎，比較此兩者在認知負荷上的差異，並且說明造成此差異的主要因素。接著採取真實驗設計，透過三階段的實驗來驗證我們分析的結果。

二、文獻探討

（一）長度線段圖與等比例線段圖

本研究所指的線段圖，是用二條線段表示題目中各數量及數量間關係的「並排雙線段圖」，以線段的長度來表示問題中的數量，藉弧線表示數量的起點與終點，所求的未知量以括號加上問號「（?）」表示，並以視覺線索察覺到線段的空間關係，所呈現問題角色間的倍數或者比例關係，以下分別介紹本研究所採用的兩種不同類型的線段圖。

1. 長度線段圖

圖形表徵中利用線段的長度來表示問題情境中的數量，並透過線段的空間關係（視覺線索）來表現各數量間的關係（蔣治邦，2001）。此線段圖型式為現今大多數的教科書所採用，如下圖 1 所示：

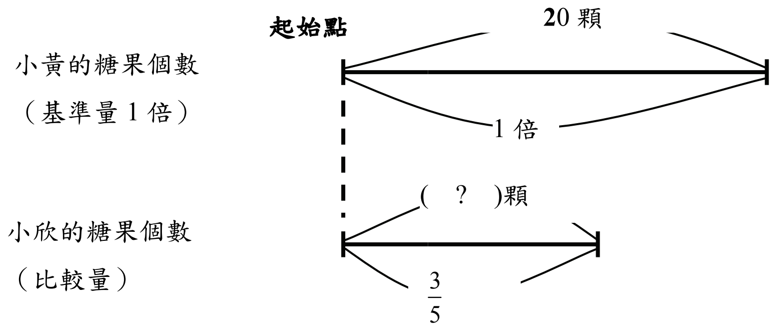


圖 1　長度線段圖

2. 成比例線段圖

在此線段圖中，要求滿足下列兩個條件：第一，圖中應標示每一條線段所代表的是什麼；第二，這些線段的長度應成比例地表現問題中的數量倍數關係。我們可以用等長的線段來表示數量之間的關係。如圖 2 所示：

82 年版部編本遇到困難度較高的分數問題（例如分數乘除法、異分母加減等問題）時，會刻意地引入成比例線段圖來表徵這些分數問題及對等關係問題，用成比例表徵的理由，在於它可以進行多次的具體等分割及再合其數份之活動（此活動爲分數問題與對等問題解題的特性），並保留這些活動的痕跡，一來，這些具體操作活動是進一步數學抽象思考的基礎，二來，保留具體活動痕跡能幫助檢查解題過程及反思解題過程（周筱亭、黃敏晃，2002）。

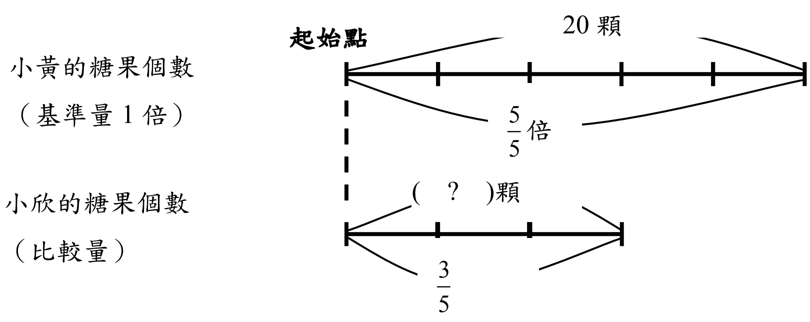


圖 2　成比例線段圖

引入線段圖的目的在於把問題情境以線段圖示表現出來，並透過線段圖促進學生列式能力，讓學童理解式子所表達的情境與概念。現今國小各版本教科書均在六年級下學期教導學童學習「基準量與比較量」單元，而三個版本的教材皆以線段圖作爲輔助學童學習「怎樣解題」的一種教學工具（南一版，2012；康軒版，2012；翰林版，2012）。再者，各版本皆以長度線段圖的形式來呈現。因此，研究者想要知道當引入成比例線段圖時，會對學童產生何種影響？

大多數的研究（蔣治邦，2001；李玉珍，2013；林施君，2013；Koedinger & Terao, 2002）都在探討：學童如何以長度線段圖表徵來理解文字題所表達的情境與意義、線段圖對學習者所扮演的角色，以及轉譯過程對學習成效的影響。而陳竹村（1998）的研究主要針對成比例線段圖的意義、功能與重要性提出建議，並沒有學習成效的實證數據。很少研究會探討影響學童使用線段圖

成功解題的原因，且尚未有研究比較不同線段圖解題策略對學童在學習上的影響。所以，本研究藉由兩種線段圖表徵解題策略的教學實驗，來探討當學童先備知識不同時，使用不同線段圖解題策略對認知負荷與學習成效的影響。

（二）認知負荷理論

認知負荷（cognitive load）理論由澳洲學者 Sweller（1988），將此觀念引入教育界，探討教學法與學習內容對認知的影響，並命名為「認知負荷理論」。此理論假設：人類的認知結構是由所有處理意識活動的有限空間工作記憶區，以及儲存著各種不同自動化程度的基模架構並有著無限容量之長期記憶區所組成。當個體在工作記憶區處理的訊息量超出工作記憶區容量或者時間的限制時，則會對個體產生認知負荷，而此認知負荷會妨礙個體認知。以下簡單描述認知負荷的新修正觀點來並且探討評估認知負荷的方法。

1. 認知負荷的新修正觀點

Sweller（2010a, 2010b）將各種認知負荷的來源單一化為元素的互動性（element interactivity）。並重新修正了個體感知認知負荷構成之模型，僅定義為內在與外在負荷之總和，而將增生負荷排除在外。此修正觀點對認知負荷的測量及以認知負荷理論為依據的實驗設計均有指導性的意義。認知負荷理論是基於人類的認知結構而形成的教學設計理論。人類經由自然演化的認知結構（human cognitive architecture）形成了認知的訊息處理系統（information processing system）。以演化論的觀點考慮人類認知結構，透過了解認知結構的原則，進而理解認知處理的限制，是認知負荷理論的基本思想。在此思想下可以得到這樣的認知處理結構模式：學習是接收新訊息與原有基模重組並儲存在長期記憶中的過程。大量原先被儲存在長期記憶中已組織好的，包含提取條件的基模，當遇到合適的情境時就會被提取。當沒有合適的基模可被提取時，工作記憶會隨機提取基模並嘗試其與新訊息重組的有效性。而為了保證系統的可靠工作，工作記憶的容量非常有限（涂金堂，2011；黃一泓、虞翔，2014）。學習過程中，對學習者而言其互動元素量超過了工作記憶的容量限制，即表示認知負荷超過了學習者的認知處理限制，學習成效就會顯著降低。根據認知負荷理論的新模型，以互動元素量定義學習者所感受的認知負荷有以下構成。

（1）內在負荷（intrinsic cognitive load）

內在負荷被認為是由需要被學習與理解的材料其本身複雜程度所決定。內在負荷的高低取決於該學習內容對學習者的互動元素之多寡，而其互動元素的量是無法被外在的教學過程來改變的。從認知結構的觀點看，即是學習素材本身對於學習者而言，需要同時占據其工作記憶以及參與基模建構過程的互動元素量。

（2）外在負荷（extraneous cognitive load）

外在負荷被認為是在不改變學習內容的前提下，教材設計或教學過程中所額外產生的互動元素量。從認知結構的觀點看，占據工作記憶容量，却不參與基模重組建構的元素因而造成了學習者的外在認知負荷。

增生負荷（germane cognitive load）代表了學習者為了克服內在負荷，因而投入到與學習任務本身相關的認知資源。從認知結構的觀點看，增生負荷指的是學習者主動投入到處理內在負荷的工作記憶量，它不是一個獨立來源的認知負荷。

2. 評量認知負荷的方法

根據外在及內在負荷的特性，認知負荷是個多向度決定，可被學習者感知，且可能隨著學習過程波動的量。由於認知負荷的特性，測量認知負荷是個困難的任務。在目前已有的研究中，大約可分為主觀衡量法（subjective techniques）及客觀衡量法（objective techniques）（Brünken, Seufert, & Paas, 2010）。

由於以往研究的實驗對象大多是大學生，而本研究的對象為國小六年級的學童，如同 Wong、Leahy、Marcus 與 Sweller（2012）所提出的，將主觀衡量法的指標用於量測國小學童的主動感受時，它無法敏感的反應個體之認知負荷，所以本研究不以主觀衡量法來評估學習者感受的認知負荷，與 Wong 等人的研究相同，以客觀衡量法中的間接指標學習成效測驗來觀察認知負荷的差異。在本研究中，對於已經被隨機分組的學習者而言，線段圖與文字敘述的呈現方式對各組都是一致的，而學習者需理解不同線段圖表徵的型式即構成內在負荷的差異。由此，學習者在成效測驗若顯現出的差異，就可視為不同線段圖表徵解題策略的影響。

（三）文字與圖像理解的整合模式

Schnotz 在 2003 年提出 IMTPC 模式，並且在 2005 年進一步修正（Horz & Schnotz, 2010; Schnotz, 2005; Schnotz & Bannert, 2003）。文字與圖像使用不同的符號系統，處理訊息的過程自然也有所不同。訊息（information）可分為以文字為主的「描述性」（descriptive）訊息，例如口語、文字、數學公式、邏輯表達等，以及以圖像為主的「描繪性」（depictive）訊息，指以圖示（icon）表達意義，圖示的規則是任意的、依據成規的。Schnotz 將此兩種表徵處理系統視為兩個認知模組（modules），在訊息處理的過程，模組並非分開運作，而是持續的互動、互相影響。假如理解視為溝通的一部分，依據某人所寫或畫的記號（文字或圖像），理解就是一個建立在某人所產生的外部表徵為基礎來建構內部表徵的過程。文字表面結構的心智表徵和文字語意內容的命題表徵都是描述性表徵，它們都使用符號來描述主題。相對上，視覺的影像及心智模式都是描繪的表徵，它們的內在結構都可以對應到所要表達主題的結構。

在長期記憶區的認知基模會引導個體來進行模式建構（model construction）與模式檢測（model inspection）的過程，而此過程進行時，命題表徵（propositional representation）與心智模式（mental model）會持續的產生交互作用。就是對文字及圖像所要表達的概念會更深入的理解，並可以慢慢修正學習者本身的心智模式與命題表徵。因此，此模式不只可以用來分析文字與圖像的理解，也可以用來研究從外部表徵來建構內部表徵的過程。知識的外部化可以用來溝通，例如教學者會藉由畫圖來輔助講解題意，個人可以將產生的外部表徵視為認知工具來輔助問題解決，將運思及問題解決過程中所需的認知需求卸載到情境當中。

3. 阿嬤的開心農場中養了兔子與鴨子，其中兔子的數量為 60 隻，而兔子的數量為鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍，農場中共有幾隻兔子與鴨子？

解題方法：看懂步驟一、二、三後，將括號(　)內填上正確答案，並在心裡描繪線段圖 1 遍。

步驟一：找出基準量與比較量。

由於，兔子的數量為鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍，表示以鴨子的數量為基準量，兔子的數量為比較量。

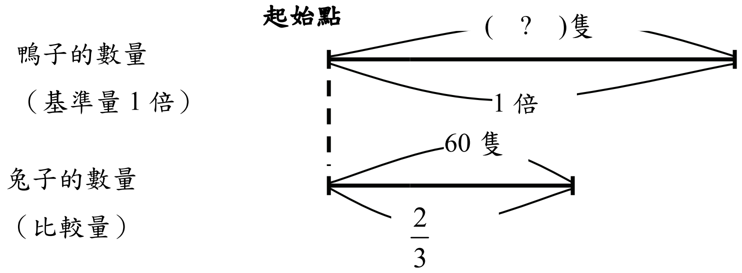
步驟二：依比較量與基準量的倍數關係，畫出二條並排的線段圖。

如果，把鴨子的數量當作 1 倍時，兔子的數量就相當於鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍。

就可以，將鴨子的數量畫成 1 倍，兔子的數量就畫成較短的 $\frac{2}{3}$ 倍；

將，未知的鴨子數量標示成(？)隻，已知的兔子數量標示成 60 隻。

如右圖



步驟三：依據線段圖，算出題目的答案。（兔子與鴨子共有幾隻?）

當鴨子的數量當作 1 倍時為(　)隻，兔子 60 隻就相當於鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍。

因此，**鴨子的數量是(　)$\times\frac{2}{3}$=60**　；　$60\div\frac{2}{3}=60\times\frac{2}{3}=90$

所以，**60+90=150**　　答：共有 **150** 隻

圖 3　**長度線段圖的教學範例**

（四）閱讀線段圖表徵解題範例之認知工作分析

當學童閱讀文字題目時，可能無法理解題目所描述的數量關係，因而無法建立一個適當的心智模式。而線段圖可以嘗試引導學童去建立此數量關係的心智模式。由於成比例線段圖的認知過程與長度線段圖類似，在此研究者省略成比例線段圖的認知過程，以下藉由 IMTPC 模式來分析閱讀長度線段圖教學範例的認知過程。而長度線段圖與成比例線段圖教學範例如圖 3 與圖 4 所示：

3. 阿嬤的開心農場中養了兔子與鴨子，其中兔子的數量為 60 隻，而兔子的數量為鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍，農場中共有幾隻兔子與鴨子？

解題方法：看懂步驟一、二、三後，將括號(　)內填上正確答案，並在心裡描繪線段圖 1 遍。

步驟一：找出基準量與比較量。

由於，兔子數量為鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍，表示以鴨子的數量為基準量，兔子數量為比較量。

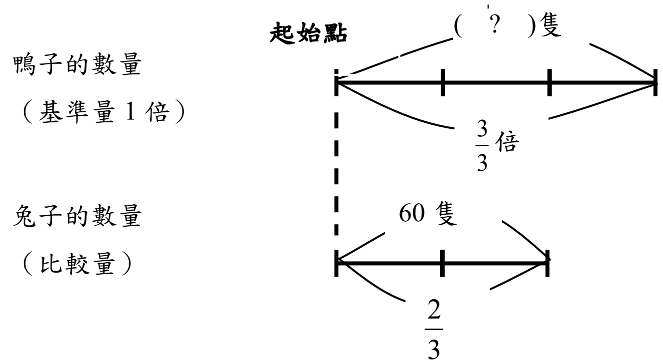
步驟二：依比較量與基準量的倍數關係，並利用等長的線段├──┤，畫出二條並排的線段圖。

如果，把鴨子的數量當作 1 倍，兔子的數量就相當於鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍。**因為 $1=\frac{3}{3}$**，

所以，將鴨子的數量畫成 3 段等長的 $\frac{1}{3}$，兔子的數量就畫成 2 段等長的 $\frac{1}{3}$；

將，未知的鴨子數量標示成(？)隻，已知的兔子數量標示成 60 隻。

如右圖：



步驟三：依據線段圖，算出題目的答案。（兔子與鴨子共有幾隻?）

當兔子的數量 2 段時為 60 隻，鴨子的數量為 3 段時，就相當於(　)隻。

因此，**鴨子的數量是** 60÷2=30（每段 30 隻） 30×3(段)=90 所以，**60+90=150** 答：共有 **150** 隻

圖 4　成比例線段圖的教學範例

以下我們開始分析閱讀長度線段圖教學範例過程中的認知處理，當學童閱讀以下的文字段落時：「阿嬤的開心農場中養了兔子與鴨子，其中兔子的數量為 60 隻，而兔子的數量為鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍，農場中共有幾隻兔子與鴨子？」，此時書寫文字經由眼睛進入感官暫存區，然後透過視覺通道進入處理視覺表徵的工作記憶區，接著進入文字表面表徵。此時所代表的意義在於，學習者能夠認識這些文字。接著當閱讀下面文字時，「由於，兔子的數量為鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍，表示以鴨子的數量為基準量，兔子的數量為比較量」。藉由文字通道進行語意處理，由於此時需藉由長期記憶區中的認知基模來幫忙，然而，初學者可能不具備此一適當的認知基模來進行概念組織，因此，藉由範例中的文字敘述來輔助學習者理解。此時即成為學習者的命題表徵。Schnotz 將此需借助長期記憶區的認知基模來形成命題表徵的過程稱為**「命題表徵歷程」**。

接著參考圖 5，藉由線段圖的輔助來幫助學習者建立心智模式，進而表達題意的數量關係，上述的文字敘述能輔助學習者來進行模式建構的動作。Schnotz 將此需借助長期記憶區的認知基模來建立心智模式的過程稱爲「模式建構歷程」。

如果，把鴨子的數量當作 1 倍時，兔子的數量就相當於鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍。

就可以，將鴨子的數量畫成 1 倍，兔子的數量就畫成較短的 $\frac{2}{3}$ 倍；

將，未知的鴨子數量標示成(？)隻，已知的兔子數量標示成 60 隻。

如右圖

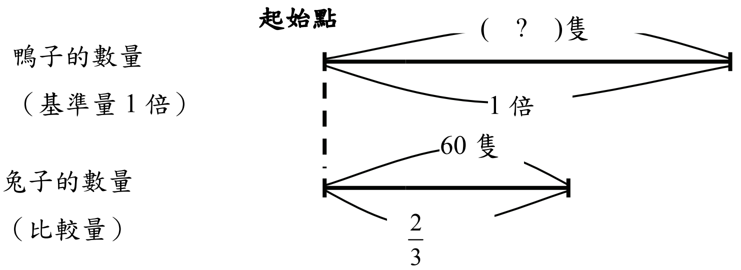


圖 5　教學範例部分內容（一）

最後參考圖 6，藉由認知基模的引導來進行模式檢測，透過模式檢測，學習者藉由線段圖的輔助，可萃取出新的訊息，進而求出題意所需的正確解答。上述的文字敘述能輔助學習者來進行模式檢測的動作。Schnotz 將此需借助長期記憶區的認知基模來進行模式檢測的過程稱爲**「模式檢測歷程」**。

當鴨子的數量當作 1 倍時爲(　)隻，兔子 60 隻就相當於鴨子的 $\frac{2}{3}$ 倍。

因此，**鴨子的數量是**( )$\times\frac{2}{3}$**=60**　；　$60\div\frac{2}{3}=60\times\frac{3}{2}=90$

所以，**60+90=150**　　答：共有 **150** 隻

圖 6　教學範例部分內容（二）

由於學童先備知識的差異代表著其認知基模的不同，因此我們依據需藉由長期記憶區中認知基模來處理的三個歷程，來比較認知過程中的認知負荷。在命題表徵歷程，兩種線段圖對學童造成的認知負荷一致。在模式建構與檢測歷程時，對閱讀長度線段圖教學範例的學童而言，需要理解分數倍的倍數關係與找出「基準量與比較量」間的數量關係，來描繪線段圖，並採用分數乘法、分數除法與分數乘除的逆運算來作答。而此過程中所需的分數運算三種數學概念對六年級學童而言，雖然已學過相關課程內容，程度較低的學童可能無法合併多個元素成爲一個較大的基模進行處理，只能將分數乘法、分數除法與分數乘除的逆運算等元素，在工作記憶區單獨處理，元素間的互動性高，因而造成較高的認知負荷。相對的，對閱讀成比例線段圖教學範例過程中的學童而言，在模式建構與檢測歷程，只需理解基準量 1 倍轉換成單位分數的整數倍關係，再藉由代表基

準量與比較量整數倍的段數關係，找出「基準量與比較量」間的數量關係來描繪線段圖，並採用整數的乘除法來作答。而此過程中所需的 1 倍的等值分數與整數的乘、除法等三種數學運算概念對六年級學童而言，由於只牽涉到整數運算，大部分學童應具備處理此一過程的認知基模，不需同時將大量的元素置入工作記憶區中運作，即可對各元素有所理解，所以其認知負荷較低。因此，我們可以了解長期記憶區中的認知基模是影響學童學習線段圖表徵解題策略能否成功的關鍵因素。

再者，長度線段圖表徵所表達的兩物件關係，是將題意所描述的基準量與比較量間的數量比轉化爲線段圖中的長度比，也就是說，藉由兩線段的長度比來表達題意中的兩物件之數量比。Lamon（1994）也曾說明，「單位化」是指將單位聚集在一起；基準化，則表示學生能以上述單位作爲新的測量標準，這單位就是所謂的「基準量」，再以此量來詮譯「比較量」。劉祥通（2004）也指出，基準化就是將「某一量數」（基準量）視爲一個新單位，然後以此單位重新詮釋「指定的量」（比較量），通常是以「比較量÷基準量＝比值」來表達，此即爲「比與比值」的概念。現今國小各版本的教科書均將「比與比值」單元視爲學習「基準量與比較量」單元的先備知識（南一版，2012；康軒版，2012；翰林版，2012），可見「比與比值」概念對學童學習長度線段圖表徵來解決「基準量與比較量」問題的影響。

所以，研究者預測：當學童先備知識的程度有所差異時，不同的線段圖表徵解題策略應該會對學習成效造成影響。更進一步的，當國小六年級學童尚未學過「比與比值」單元時，長度線段圖表徵解題策略由於需要理解分數倍的倍數關係與找出「基準量與比較量」間的數量關係來描繪線段圖，並採用分數乘法、分數除法與分數乘除的逆運算來作答。此解題策略的認知負荷要比只需理解 1 倍的等值分數概念與採用整數倍乘法運算的成比例線段圖表徵解題策略來的大，而此結果也會顯現在學習成效的表現上。然而，在「比與比值」單元學習後，由於學童「基準化」與「單位化」的能力提升（顏宗斌、劉祥通，2005；Saenz-Ludlow, 1994），此時部分學童可能已建構適當的長度線段圖解題基模，而此基模的建立會促使學童降低解題時的內在負荷，進而將此結果表現在延宕測驗的成績，因而產生與尚未學過「比與比值」單元時的測驗不同的結果。

三、研究問題

根據認知負荷理論以及相關文獻的分析，本研究欲以驗證的研究問題如下：

1. 對於不同程度的學童，分組閱讀兩種不同表徵的解題策略後，在後測成績上是否有顯著差異？

2. 在學習完「比與比值」單元的課程後，對於不同程度與採用不同表徵解題策略的學童，在延宕測驗成績上是否有顯著差異？

方法

一、研究對象

實驗的對象爲臺中市某國小六年級學童共 118 位，於六年級上學期進行實驗，而實驗的課程內容到六年級下學期才會實施。因此可排除學童因爲補習或其他因素而學習過此課程的影響。考量學童個體差異以及認知基模程度的影響，藉由前測成績的中位數，把學童分成高分群與低分群，再將高分群與低分群隨機分派到長度組及成比例組。

二、實驗設計

為避免教師教學因實驗對象的不同而產生教學方法有所差異的干擾，所有實驗教材均以學童自行閱讀的方式來學習，教師並不介入教學。實驗共分為三個階段進行：第一階段實施「基準量、比較量與倍數的關係」教學範例與解題練習，接著再進行前測；第二階段是長度線段圖與成比例線段圖教學範例閱讀，再進行後測；第三階段是實施延宕測驗，用以評估當學童學習「比與比值」單元後，對學習成效的影響。

階段一：在六年級上學期，因學童尚未學習「基準量與比較量」的單元內容，因此先使用教學範例與解題練習，讓學童理解基準量、比較量與倍數關係之概念。此階段學童須閱讀教學範例與解題練習，閱讀完教材後進行前測，以作為高、低分群的依據。此階段實施時間為：閱讀教學範例與解題練習 20 分鐘，休息 3 分鐘後，進行前測 16 分鐘，此階段實施總時間為 39 分鐘。

階段二：由於教學目標為理解並能應用線段圖表徵來解題，長度組及成比例組的學童分別閱讀各組的紙本教材，教師不介入教學，實驗時只需將已分組的學生依據組別發給各組的教材即可順利進行。紙本教材設計的呈現方式兩組均相同，只有線段圖表徵解題策略不同，因此，分組實驗的目的在於讓學童有不同的內在負荷，即學習不同的線段圖表徵解題策略。而由於教材呈現的方式相同，因此對兩組的學童而言，外在負荷一致。在階段二實驗前，藉由非參與本實驗 30 位學童的預試，先估計這些學童的範例閱讀時間後，以讓學童有充裕的閱讀時間為原則的前提下，作為本實驗閱讀範例及後測時間的依據。本階段在階段一完成後兩天進行，實驗時間為：閱讀長度組或成比例組教學範例共 4 題，一次呈現一題，每題 6 分鐘，合計 24 分鐘。休息 3 分鐘後，進行後測，共 4 題，一次呈現一題，每題 8 分鐘，合計 32 分鐘，此階段實施總時間為 59 分鐘。

階段三：在階段二完成後約兩周的時間，我們進行學習成效延宕測驗。此時，由於學期中課程進度的進行，所有參與實驗的學童，在正規課程中已完成了「比與比值」單元的學習，此時學童在長期記憶區的認知基模，與階段二接受後測時相比已不相同。此延宕測驗的目的在於檢測學童學習完「比與比值」單元後，不同線段圖表徵解題策略在學習成效上的差異。藉由此延宕測驗的實施，進一步驗證文字與圖像理解之整合模式分析的有效性。此階段實施時間與後測相同：一次呈現一題，共四題，每題限時 8 分鐘，總計 32 分鐘。

表 1　實驗設計表

四個班級 共 118 人	基準量、比較量與倍數的關係教學	前測	分配	長度線段圖與成比例線段圖範例教學	後測	延宕測驗
	X1	O1	RH 長	X 長	O2	O3
	X1	O1	RH 成	X 成	O2	O3
	X1	O1	RL 長	X 長	O2	O3
	X1	O1	RL 成	X 成	O2	O3

註：X1：進行「基準量、比較量與倍數的關係」教學。
O1：進行「基準量、比較量與倍數的關係」概念的測驗。
RH 長，RH 成，RL 長，RL 成：R 表示隨機分派；H 表示高分群；L 成表示低分群；長表示長度組；成表示成比例組。
X 長：閱讀長度線段圖的教學範例，X 成：閱讀成比例線段圖的教學範例。
O2：進行後測。
O3：進行延宕測驗。

整個實驗設計如表 1 所示。故本實驗的自變項為學童的高、低分群以及不同線段圖表徵解題策略的兩個因子，依變項為線段圖範例的後測與延宕測驗學習成效，而控制變項為教學內容與教學地點、紙本教學範例。

三、研究工具

本研究使用的實驗工具，共計有五項，分別爲基準量、比較量與倍數關係的學習教材、前測、線段圖表徵學習教材、後測，以及延宕測驗。分述如下：

1. 爸爸的年齡是你的年齡的 4 倍。
這句話的意思是：以你的年齡當作 1 時，則爸爸的年齡是你的 4 倍。
也就是，把你的年齡當作基準量(當作 1)，爸爸的年齡當作比較量。
則因為，比較量÷基準量=倍數，因此 $4\div1=4$ 倍。
這時，如果你的年齡是 10 歲，則因為，比較量÷基準量=倍數。
即，比較量÷10=4，所以，爸爸的年齡是 $4\times10=40$ 歲。
這時，如果你的年齡是 9 歲，則因為，比較量÷基準量=倍數。
即，比較量÷9=4，所以，爸爸的年齡是 $4\times9=36$ 歲。

練習 1. 媽媽的年齡是你的年齡的 5 倍，現在你的年齡 9 歲，媽媽的年齡是幾歲?

(1) 就是，將你的年齡當作(　　　)量；媽媽的年齡當作(　　　)量
(2) 媽媽的年齡是(　　)歲。

2. 你的年齡是媽媽年齡的 $\frac{1}{5}$ 倍。

這句話的意思是：以媽媽年齡當作 1 時，你的年齡是她的 $\frac{1}{5}$ 倍。
也就是，把媽媽年齡當作基準量(當作 1)，你的年齡當作比較量。
則因為，比較量÷基準量=倍數，因此，$\frac{1}{5}\div1=\frac{1}{5}$ 倍。
這時，如果媽媽的年齡是 50 歲，則因為，比較量÷基準量=倍數。
即，比較量÷50=$\frac{1}{5}$，所以，你的年齡是 10 歲。
這時，如果媽媽的年齡是 40 歲，則因為，比較量÷基準量=倍數。
即，比較量÷40=$\frac{1}{5}$，所以，你的年齡是 8 歲。

練習 2. 你的年齡是爸爸年齡的 $\frac{1}{6}$ 倍，現在爸爸的年齡 42 歲，你的年齡是幾歲?

(1) 就是，將爸爸的年齡當作(　　)量；你的年齡當作(　　　)量。
(2) 如果，把爸爸年齡當作 1 時，你的年齡是他的(　　　)倍
(3) 你的年齡是(　　　)歲。

圖 7　基準量、比較量與倍數的關係的學習教材

（一）基準量、比較量與倍數的關係學習教材

教材內容涉及分數的乘法與分數的除法，學童於五下及六上均已學習過。但其中部分與「基準量、比較量與比值的關係」相關，因考慮學童的先備知識，尚未有「比值」的概念，所以將「比值」的名稱轉成學童較熟悉的「倍數」，再參考國小數學教材的內容，製作「基準量、比較量與倍數的關係」的教學範例與解題練習，各 4 題。當學童閱讀完一題教學範例後，立刻進行一題的解題練習，如圖 7 所示，以加強學童理解「基準量與比較量，及兩者的倍數關係」。有整數倍與真分數倍兩種情況的詳細文字與算式說明。每位參與實驗學童的題目都相同。

教學範例與解題練習的設計原則在於：先以個性化原則（personalization principle）（Moreno & Mayer, 2000）及整數倍的引入，提取長期記憶區的認知基模進行概念的組織，循序漸進由易到難的方式引入教材，期待學童能借由基模的獲得與自動化來降低認知負荷。緊接著解題練習，強化概念。最後才進行分數倍教學，掌握單位分數的概念（McCloskey & Norton, 2009）。

1. 紅彩帶長 12 公尺，藍彩帶的長是紅彩帶的 $\frac{2}{3}$ 倍，藍彩帶長是多少公尺?

(1)將(　　　　　　)的長當作基準量；(　　　　　　　)的長當作比較量。

(2)如果，把紅彩帶的長當作 1 時，藍彩帶的長就相當於紅彩帶的(　)倍。

2. 有甲、乙兩人，甲的錢是乙的錢 $\frac{2}{5}$ 倍。

(1)上題中，乙的錢當作(　　　　)量；甲的錢當作(　　　　)量。

(2)如果，乙的錢是 100 元，甲的錢是(　　　)元。

3. **甲、乙、丙三人，甲有 200 元，乙是甲的 3 倍，丙是甲的 $\frac{2}{5}$ 倍，求乙、丙二人分別有多少元?**

(1)上題中，乙的錢當作(　　)量；甲的錢當作(　　)量；丙的錢當作(　　)量。

(2)如果，把甲的錢當作 1 時，乙的錢就相當於甲的(　)倍，丙的錢就相當於甲的(　)倍。

4. 哥哥有 160 元，弟弟有 40 元，弟弟的錢是哥哥的幾倍?

(1)這題中，比較量是多少元?基準量是多少元?比較量：(　　)元；基準量：(　　　)元

(2)弟弟的錢是哥哥的幾倍?

列出算式：
答：______ 倍

圖 8　前測試題範例

（二）前測

前測目的在測量學童理解所需具備的「基準量與比較量，及兩者的倍數關係」熟練程度，並作爲高、低分群的依據。前測 4 題共 13 格填充題及 1 格列式題，答對一格得 1 分，答錯得 0 分，滿分爲 14 分，試題範例如圖 8 所示。

（三）線段圖表徵學習教材

長度與成比例線段圖教學範例的設計原則爲：先採用分步驟教學降低內在負荷，文字與圖形整合一起避免分散注意力效應，將線段圖並排，顯示兩量的數量關係，進而輔助學童形成線段圖解題策略的心智模式（Sweller, 2010a, 2010b）。教材分爲長度線段圖與成比例線段圖兩種教學範例，長度線段圖與成比例線段圖範例如圖 3 與 4 所示。

（四）後測

後測主要目的在測量學童線段圖表徵解題策略的學習成效。題目共計 4 題，均是以算出兩數相加爲主。第 1 題是基準量未知、第 2 題是比較量未知、第 3 題是基準量與比較量都未知、第 4 題是三個主詞，如 A 是 B 的 2 倍，B 是 C 的 1/4。前面兩題爲基本題型作爲學童學習近遷移的成效測驗；後面兩題爲進階題型，作爲學童學習遠遷移的成效測驗。

後測題目如圖 9 所示。計分方式爲每題 4 分，共 16 分。每一題都分成兩部分來評分：在繪製線段圖部分，比如基準量爲 1，而比較量爲 3/4，在長度組中，只要劃出來的線段有標明 3/4 與 1，而 3/4 的線段長度較 1 小，就給分。在成比例組中，只要劃出來的線段有標明 3/4 與 1，而 3/4 的線段長度較 1 小，且在線段圖上有正確的分割，就給分。完全繪製正確者給 2 分，只標示或繪製

部份答案者，給予 1 分，如果是繪圖倍數關係是正確，卻因粗心大意而沒有並排，仍給予 1 分；而在算式及計算部分，考量如果嚴格執行題幹的要求時，成比例組中，可能有學童會使用分數乘除法解題，而長度組中，也可能會有學童使用整數乘除法解題，若選擇忽略此兩者，可能會低估學習者的學習成效。因此，此兩種型態的計算程序，研究者一律都給分。解題過程正確者，給予 2 分，只回答部分答案者，給予 1 分。如果是列式正確卻計算錯誤者，仍給予 1 分。

說明：1. 先畫出並排的線段圖，且在線段前面標示名稱、基準量與比較量。
2. 必須使用教學範例所教的解題方法來作答，否則不給分。

1. 老師到文具行買一盒彩色筆與一盒粉蠟筆，彩色筆一盒為 72 元，粉蠟筆的價錢為彩色筆的 $\frac{3}{4}$ 倍，請問老師共花了多少錢？
2. 小君到書局買了一本故事書與一本名人傳記，故事書一本為 120 元，故事書的價格為名人傳記的 $\frac{5}{6}$ 倍，請問小君買一本故事書與一本名人傳記共花了多少錢？
3. 黃色彈珠與藍色彈珠總共 120 顆，其中黃色彈珠是藍色彈珠的 $\frac{2}{3}$ 倍，請問黃色彈珠與藍色彈珠各有多少顆？
4. 甲、乙、丙三人，共有 700 元，乙是甲的 2 倍，丙是乙的 $\frac{1}{4}$ 倍，求甲、乙、丙三人各有多少元?

圖 9　後測測驗試題範例

由於繪圖與計算程序部分的評分有較大的彈性，可能會造成不公平，因而偏袒某一組的成績，影響最後的結果。研究者特別統計此部分的評分資料，以下提出說明：在繪圖評分部分，長度組的繪圖總得分爲 89，而成比例組爲 112，因不成比例被扣分的爲 0。在繪圖部分，學童並不會因爲成比例組要求較多，因此得到較低的分數。而在計算程序部分，長度組的得分爲 76，成比例組的得分爲 96。而在長度組中使用整數乘除法解題正確而得分的爲 10，在成比例組中使用分數乘除法解題正確得分的爲 11。由以上的統計資料顯示，並沒有任何一組因此評分方式受惠而影響最後的實驗結果。

（五）延宕測驗

延宕測驗主要目的在測量當學童學習「比與比值」單元後，不同線段圖表徵解題策略在學習成效上的差異。題目共計 4 題，均是以算出兩數相減爲主，也就是說，後測的題型在於求出「母子和」，而延宕測驗的題型在於求出「母子差」。評分與計分方式與後測相同，試題範例如圖 10 所示。

四、資料分析

本研究之資料分析採用 SPSS for MS Windows 18.0 進行。以分組及高、低分群爲自變項，後測成績爲依變項，採用雙因子變異數分析來探討分組與高、低分群兩因子對後測成績的影響。而延宕測驗的結果，以延宕測驗成績爲依變項，高、低分群與分組作爲自變項，進行雙因子變異數分析，探討不同表徵的解題策略在延宕測驗的表現。

說明：1. 先畫出並排的線段圖，且在線段前面標示名稱、基準量與比較量。
2. 必須使用教學範例所教的解題方法來作答，否則不給分。

1. 阿土伯到超級市場買蔬菜與水果，購買蔬菜的金額為 240 元，買水果的金額為買蔬菜金額的 $\frac{3}{4}$ 倍，請問購買蔬菜與水果的金額相差多少？
2. 小麗在花園裡種了白玫瑰與紅玫瑰，種白玫瑰的面積為 120 公頃，種白玫瑰的面積為種紅玫瑰面積的 $\frac{3}{4}$ 倍，請問花園中種白玫瑰與紅玫瑰的面積相差多少？
3. 合唱團今年的社員中女生人數是男生人數的 $\frac{2}{5}$ 倍，而且男、女人數相差 60 人，請問男、女生各有多少人？
4. 甲、乙、丙三人，乙是甲的 2 倍，丙是乙的 $\frac{1}{6}$ 倍，已經知道乙、丙二人相差 250 元，求甲、乙、丙三人各有多少元?

圖 10　延宕測驗試題範例

結果

一、描述性統計資料

在延宕測驗中有 1 位低分群長度組的學童生病未施測，將該童剔除出分析資料中。根據 117 位學童前測成績統計，其中位數爲 13 分（滿分 14 分），此結果顯示對六年級的學童而言，純粹以紙本教材讓學童自行閱讀應能達到一定的學習成效。

研究者以前測中位數爲標準，將前測成績 13 分以上（含 13 分）的學童分派至高分群（50.8%），有 60 人；前測成績 13 分以下的學童分派至低分群（49.2%），有 57 人。再分別將高分群及低分群隨機分派到長度組或成比例組，分別爲 58 人及 59 人，分組與高、低分群測驗成績的描述性統計資料如表 2 所示。

表 2　分組與高低分群學習成效的描述性統計表

分組（滿分）	長度組 M（SD）		成比例組 M（SD）		小計 M（SD）	
分群	高分群	低分群	高分群	低分群	高分群	低分群
人數	30	28	30	29	60	57
後測成績（16）	6.67（3.63）	4.86（3.77）	9.00（4.39）	6.14（3.58）	7.83（4.17）	5.50（3.70）
小計	5.86（3.76）		7.59（4.23）			
延宕測驗（16）	8.20（3.69）	5.32（3.01）	7.90（4.60）	7.21（5.00）	8.05（4.14）	6.28（4.21）
小計	6.81（3.65）		7.56（4.77）			

二、研究結果

（一）成比例組在後測成績的表現顯著優於長度組，高分群學童在後測成績的表現顯著優於低分群學童

根據實驗結果，進行分組與高低分群的雙因子變異數分析。先進行 Levene 同質性檢定，在後測成績 F（1，113）= 1.153，p = .331，未達顯著水準，表示具同質性，可進行變異數分析。而分組與高、低分群間交互作用的 F（1，113）= .701，p = .404，未達顯著水準，表示分組與高、低分群間沒有顯著交互作用。由於交互作用不顯著，因此，分別針對分組與高、低分群作「主要效果」檢驗。

在不同分組間的分析結果顯示，在後測成績 F（1，113）= 5.907，p = .017，在分組上達顯著水準。成比例組的後測成績 7.59 明顯高於長度組的 5.86，此結果驗證之前的分析，即成比例組的認知負荷較長度組低，因此間接的表現在學習成效上。

而在高、低分群間的分析結果顯示，在後測成績 F（1，113）= 10.055，p = .002，在高、低分群上達顯著水準，高分群的後測成績 7.83 明顯高於低分群的 5.50。

（二）在學習完「比與比值」單元後，兩組表徵解題策略在延宕測驗的表現沒有顯著差異，而高分群學童在延宕測驗的表現依然顯著優於低分群學童

爲探討在「比與比值」單元的學習後，高、低分群學童在兩種不同表徵的解題策略上延宕測驗的差異。以延宕測驗成績爲依變項，高、低分群與分組作爲自變項，來進行雙因子變異數分析。先進行 *Levene* 同質性檢定，在延宕測驗成績 F（1，113）= 2.130，p = .100，未達顯著水準，表示具同質性，可進行變異數分析。而分組與高、低分群間交互作用的檢驗 F（1，113）= 2.811，p = .096，未達顯著水準，表示分組與高、低分群間沒有顯著交互作用。由於交互作用不顯著，因此，分別針對分組與高、低分群作「主要效果」檢驗。

在不同分組間的分析結果顯示，在延宕測驗成績 F（1，113）= 1.427，p = .235，不同分組間沒有顯著差異。顯示不同分組的學童在延宕測驗的表現與後測的表現並不一致。而在高、低分群間的分析結果顯示，在延宕測驗成績 F（1，113）= 2.811，p = .014，在高、低分群上達顯著水準，高分群的延宕測驗成績 8.05 明顯優於低分群的 6.28，此結果與後測成績的表現一致。

討論

一、研究結論分析

本研究以 Schnotz（2005）提出的文字與圖像理解之整合模式（integrated model of text and picture comprehension）爲依據，分析兩種線段圖表徵解題策略的認知過程，並以認知負荷新修正觀點爲基礎，比較此兩者在認知負荷上的差異，並且說明造成此差異的主要因素在於：閱讀範例的認知過程需藉由長期記憶區中認知基模的協助，若學童先備知識不足，則無法建構適當的解題基模。也就是說，由於學習者的數學概念無法理解長度線段圖表徵背後所表達的物件關係，此表徵的解題策略可能會造成學習者過高的認知負荷，無法達到教學目標。研究者以三階段的實驗來驗證此分析的論點，並且得到下列結論。

（一）成比例線段圖表徵的解題策略在後測成績的表現顯著優於長度線段圖表徵的解題策略

不同線段圖的表徵意味著學習者需要不同的認知基模來建立心智模式。因此與研究者之前的分析一致。當國小六年級學童尙未學過「比與比值」單元時，長度組由於需要理解分數倍的倍數關係與找出「基準量與比較量」間的數量關係來描繪線段圖，並採用分數乘法、分數除法與分數乘除的逆運算來作答，可能對學童造成過高的認知負荷。由於成比例線段圖具備較低階的數學概念，元素間互動的程度低，學童較容易理解，使得其內在負荷較低。因此成比例組的解題策略有

較低的認知負荷，對不同程度的學童都有較好的學習成效。另外，相較於低分群學童，高分群學童都較能從認知基模中提取適當的概念進而整合教學範例中的訊息來形成心智模式，掌握題意所表達的數量關係，達到較好的學習成效。

（二）學習「比與比值」單元後，兩種表徵解題策略在延宕測驗的表現沒有顯著差異

在學習「比與比值」單元後，不同分組間的延宕測驗成績沒有顯著差異，此結果與後測成績明顯不同。成比例組在延宕測驗的表現並沒有顯著優於長度組。仔細觀察表 2 中的細格可以發現此結果主要由高分群學童的表現所貢獻。對高分群學童而言，長度組在延宕測驗的表現反而略優於成比例組。而在低分群學童的表現上，成比例組的優勢依然存在。

對高分群學童而言，在尚未學習「比與比值」單元前，成比例線段表徵解題策略是較佳的。然而，當他們學習完「比與比值」單元後，長度線段圖表徵解題策略反而較具優勢。也就是說，在學習初期，本來對高分群學童具有優勢的解題策略，當他們能力提升後，此策略的優勢消失，另一個在初期表現較差的策略此時反而顯示出它的成效，產生認知負荷理論中所謂的專家反轉效應（expertise reversal effect）（Kalyuga, 2005）。

檢視高分群學童在後測與延宕測驗試卷的答題變化：可能由於一個月後才進行延宕測驗，在成比例組中，部分學童在判斷基準量與比較量時會發生錯誤，而此錯誤會導致整題拿不到分數，因而由後測的 4 分轉變為延宕測的 0 分，使得成比例組分數由後測的 9.00 轉變為延宕測驗的 7.90。然而，在長度組中，雖然同樣也有判斷錯誤的情形，但由於長度組的認知負荷較高，即使判斷錯誤，也只會讓分數由後測的 2 分轉變為延宕測的 0 分，對整體分數的影響較小。反而可能因為「比與比值」概念的加強，更多學童的分數由後側的 2 分提升到延宕測的 4 分，造成長度組的分數由後測的 6.67 轉變為延宕測驗的 8.20。

研究者推論造成此一現象的可能因素在於：「比與比值」概念的建立促使高分群學童「基準化」與「單位化」的能力提升（顏宗斌、劉祥通，2005；Saenz-Ludlow, 1994），而此能力與長度線段圖表徵所表達的概念一致。正如 Sweller（2010a）所指出：只有建立適當的基模，才能減少元素互動量，而元素互動量的減少就會降低學習者的認知負荷。此時部分高分群學童可能已經建立長度線段圖表徵的解題基模，而此基模的獲得讓長度組的認知負荷降低，此時長度組的認知負荷可能已低於或等於成比例組，才會造成長度組在延宕測驗的成績略優於成比例組。所以，對高分群學童而言，此一現象造成了專家反轉效應。此點也驗證了國小教科書的編排順序：先學習「比與比值」單元後，再學「基準量與比較量」單元，並將「比與比值」概念視為學習「基準量與比較量」單元的重要先備知識。

同樣檢視低分群學童的試卷變化情形：在成比例組中，由於基準量與比較量的判斷正確，且可能因為認知負荷較低的原因，使得部分學童由後測的 0 分轉變為延宕測的 4 分。不過，由於高分群的高先備知識條件的因素，此一現象在高分群並未發現。另外，也同樣有如高分群學童的現象：即部分學童在判斷基準量與比較量時會發生錯誤。然而，由於低分群學童在後測的得分本來就不高，此錯誤只會由後測的 1 分轉變為延宕測的 0 分，對整體分數的影響不大。基於上述的原因，使得成比例組分數由後測的 6.14 提升到延宕測驗的 7.21。

研究者推論造成此現象的因素在於：由於「比與比值」單元的學習，使得部分低分群學童較能夠理解基準量與比較量的判斷。然而，可能也只僅限於此概念的發展。對於長度線段圖表徵解題基模的建立並沒有幫助，而由於成比例組的認知負荷較低，若基準量與比較量的判斷正確，他們的成績有很大機會因此而提升，而此現象可由表 2 中的低分群學童分數的變化得到驗證。對此學習階段的低分群同學而言，由於尚未能建構長度線段圖表徵的解題基模，對他們而言，長度組的認知負荷依舊高於成比例組，成比例線段圖才能有效解題。

二、在教學上的涵義

（一）成比例線段圖解題策略在教學上的拓展與應用

在「基準量與比較量」單元的教學，就能正確解題爲目標時，成比例線段圖表徵的解題策略具有內在負荷相對較低的特點，而成爲較佳的教材。然而，成比例線段圖的整數乘除解法並非此單元教學的最終目標，學童仍須學會長度線段圖表徵的分數乘除之解法，利用比例的關係，以「母子和」及「母子差」的概念來解題。因此，教師可將成比例線段圖作爲理解分數解法的輔助工具，藉由講解它與長度線段圖兩者間運算的對應關係，讓低分群學童掌握整數乘除與分數乘除解法之間的關係，提升學童在「基準量與比較量」單元學習成功的機會。

（二）針對學習者的程度採用適當的教學策略

在學習完「比與比值」單元後，高分群學童能從長度線段圖表徵的解題策略達成有效的教學目標。而對低分群學童而言，只有成比例線段圖表徵的解題策略能解題成功。所以教師在進行本單元教學時，需確認學童在「比與比值」單元概念的理解程度，待學習者較能掌握比的概念時，再適時的切入長度線段圖，以輔助學童能建構出長度線段圖的解題基模。

參考文獻

朱建正、吳昭容（1993）：**國小兒童使用數學圖示之發展研究**。行政院國家科學委員會研究計畫成果報告（編號：NSC-82-0111-S-002-004）。[Chu, C. T., & Wu, C. J (1993). *The development of understanding mathematic diagrams in children*. National Science Council Research Project (Report. NSC-82-0111-S-002-004).]

李玉珍（2013）：**國小六年級學童以線段圖表徵基準量問題的解題研究**。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文。[Lee, Y. C. (2013). *A study of line segment diagram representation on reference guantity problem solving performance for sixth grader* (Unpublished master’s thesis). National Pingtung University of Education, Pingtung, Taiwan.]

周筱亭、黃敏晃主編（2002）：**國小數學教材分析－比（含線段圖）**。取自國家教育院網站，http://www.naer.edu.tw/216/book12/index.htm。[Zhou, H. T., & Huang, M. H. (2002). *The analysis of elementary school mathematics materials-ratio (including the line graph).* Retrieved from http://www.naer.edu.tw/216/book12/index.htm.]

林施君（2013）：**線段圖表徵對國小學生代數解題表現之研究**。國立屏東教育大學數理教育研究所碩士論文。[Lin, S. C. (2013). *The study of line-diagram representation on algebraic problem solving performance for elementary school students* (Unpublished master’s thesis). National Pingtung University of Education, Pingtung, Taiwan.]

南一版（2012）：**國民小學數學課本、備課指引第十二冊**。台南：南一。[Nani (2012). *Elementary school mathematics textbook instructor guide (No. 12)*. Tainan, Taiwan: Nani Press.]

康軒版（2012）：**國小數學 6 下教師手冊**。新北：康軒。[Kang Hsuan (2012). *Elementary school mathematics textbook instructor guid*e *(No. 12).* New Taipei, Taiwan: Kang Hsuan Press.]

翰林版（2012）：**國民小學數學第十二冊教師手冊**。台南：翰林。[Han Lin (2012). *Elementary School Mathematics Textbook Instructor guide (No. 12)*. Tainan, Taiwan, Hanlin Press.]

凃金堂（2011）：運用「範例（worked-out example）」在國小數學問題解決的教學實驗研究。**教育心理學報，43**（1），25-50。[Tu, C. T. (2011). An instructional experiment: Using worked-out examples in mathematics problem-solving of elementary school students. *Bulletin of Educational Psychology, 43*(1), 25-50.]

陳竹村（1998）：**對等關係與線段圖的教材處理**。載於教育部臺灣省國民學校教師研習會（主編），**國小數學科新課程概說（高年級）--協助兒童認知發展的數學課程**，153-165。新北：台灣省國民學校教師研習會。[Chen, Z. C. (1998). The manipulation of teaching materials in equivalent relation and line diagram. In Taiwan elementary school teacher workshops (Eds.), *An introduction to new mathematics curriculum for elementary school-an mathematics curriculum to support cognition development of children* (pp. 153-165). New Taipei, Taiwan: Elementary School Teacher Workshops Press.]

劉祥通（2004）：**分數與比例問題解題分析—從數學提問教學的觀點**。台北：師大書苑。[Liu, S. T. (2004). *The analysis of problem solving in fraction and ratio problem-a telling questions mathematics teaching view*. Taipei, Taiwan, Lucky Book.]

黃一泓、虞翔（2014）：不同範例與解題組合對初學者在學習上的影響。**教育心理學報，45**（4），497-515。[Huang, Y. H., & Yu, X. (2014): The effect of different combinations of examples and problems on novices' learning. *Bulletin of Educational Psychology, 45*(4), 497-515.]

蔣治邦（2001）：中年級學童「部份-全體」運思的發展：文字題選圖與解題作業表現的差異。**中華心理學刊，43**（2），239-254。[Chiang, C. P. (2001). Development of part-whole operation: Pictorial representation addition and subtraction word problems. *Chinese Journal of Psychology, 43*(2), 239-254.]

顏宗斌、劉祥通（2005）：一位國小六年級學生在分數基準化問題的解題表現。**科學教育研究與發展季刊，41**，44-73。[Yen, C. P., & Liu, S. T. (2005). A sixth graders' performance in solving the fraction norming problems. *Research and Development in Science Education Quarterly, 41*, 44-73.]

Anderson, J. R. (1996). ACT: A simple theory of complex cognition. *American Psychologist, 51*, 355-365.

Brünken, R., Seufert, T., & Paas, P., (2010). Measuring cognitive load. In J. L. Plass, R. Moreno, & R. Brünken (Eds.), *Cognitive Load Theory* (pp. 181-202). New York, NY: Cambridge University Press.

Cohen, S. A., & Stover, G. (1981). Effects of teaching sixth grade students to modify format variables of math word problems. *Reading Research Quarterly, 16*, 175-199.

Horz, H., & Schnotz, W. (2010). Cognitive load in learning with multiple representations, In J. L. Plass, R. Moreno, & R. Brünken (Eds.), *Cognitive load theory* (pp. 229-249). New York, NY: Cambridge University Press.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). Albany, NY: State University of New York Press.

Kalyuga, S. (2005). Prior knowledge principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 325-337). New York, NY: Cambridge University Press.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension: A paradigm for cognition.* New York, NY: Cambridge University Press.

Koedinger, K. R., & Terao, A. (2002). A cognitive task analysis of using pictures to support pre-algebraic reasoning. In C. D. Schunn & W. Gray (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual conference of the cognitive science society*, 542-547. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

McCloskey, A., & Norton, A. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 44-50.

Moreno, R., & Mayer, R. E. (2000). Engaging students in active learning: The case for personalized multimedia messages. *Journal of Educational Psychology, 93*, 165-173.

Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 50-85.

Schnotz, W. (2005). An integrated model of multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 49-69). New York, NY: Cambridge University Press.

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representations. *Learning and Instruction, 13*, 141-156.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science, 12*, 257-285.

Sweller, J. (2010a). Element interactivity and intrinsic, extraneous, and germane cognitive load. *Educational Psychology Review, 22*, 123-138.

Sweller, J. (2010b). Cognitive load theory: Recent theoretical advances. In J. L. Plass, R. Moreno, & R. Brünken (Eds.), *Cognitive load theory* (pp. 29-47). New York, NY: Cambridge University Press.

Wong, A., Leahy, W., Marcus, N., & Sweller, J. (2012). Cognitive load theory: The transient information effect and e-learning. *Learning and Instruction, 22*, 449-457.

收 稿 日 期：2014 年 12 月 22 日
一稿修訂日期：2014 年 12 月 23 日
二稿修訂日期：2015 年 04 月 30 日
三稿修訂日期：2015 年 06 月 01 日
接受刊登日期：2015 年 06 月 03 日

Bulletin of Educational Psychology, 2016, 47(4), 581-601
National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, R.O.C.

The Comparison of Two Mathematics Problem-Solving Strategies of Line-Diagram Representations on Learning Achievements

Yi-Hung Huang
National Taichung University of Education
Department of Mathematics Education

Jin-Tai Shie
Yi-Min Elementary School

This research is to study how the two mathematics problem-solving strategies, length and proportional line-diagram representations, affect sixth grade students' cognitive load and learning performance during they study the unit of "baseline and comparison". The researchers adopted Schnotz's integrated model of text and picture comprehension to analyze the cognitive process of studying worked examples with line diagram, and compare the differences in term of cognitive load between the two methods based on cognitive load theory. Then, the researcher conducted a three phases of true-experimental design to show the effectiveness of our analysis. The experimental results show that the proportional line-diagram condition performed significantly better than the length line-diagram condition on post-tests, and after the students had learned the unit of "ratio", the difference between the length line-diagram condition and the proportional line-diagram condition on delay-test are not significant. Finally, the researcher will provide some implications for the educational authorities, teachers, and future researches.

KEY WORDS: cognitive load theory, line diagram, representations